

## بدفهمی‌های رایج در مثلثات در دوره متوسطه و چند راهکار برای مقابله با آنها

دکتر منصوره موسی پور<sup>۱</sup>، سپیده شاه محمد زاده<sup>۲</sup>

دریافت: ۱۴۰۰/۶/۲۲ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۲۱

### چکیده

مثلثات یکی از مفاهیم پایه‌ای و پرکاربرد در ریاضی و زندگی است. دانش‌آموزان با بدفهمی‌هایی در یادگیری مثلثات مواجه هستند که مانع از یادگیری کامل این درس توسط آنها می‌شود. شناسایی این بدفهمی‌ها ضروری است و نقش دبیران برای رفع آنها کلیدی است. در این مقاله به بررسی بدفهمی‌هایی می‌پردازیم که در هنگام یادگیری مثلثات برای دانش‌آموزان دوره متوسطه به وجود می‌آید. همچنین راهکارهایی برای رفع این بدفهمی در مقاله ارائه می‌شود که از جمله آنها می‌توان استفاده از روش‌های تدریس مناسب، استفاده از ابزارهایی همانند ماشین حساب و نرم‌افزارهای ریاضی مانند جئوجبرا نام برد. به علاوه، استفاده از نقشه‌های مفهومی به عنوان یکی دیگر از راه‌های رفع بدفهمی‌ها توصیه می‌شود که می‌توان آنها را هم در آموزش و هم در ارزیابی از دانش‌آموزان، مورد استفاده قرار داد.

**کلیدواژه‌ها:** بدفهمی، مثلثات، ریاضی متوسطه، نرم‌افزارها، راهکارها

۱. استادیار گروه ریاضی دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، نویسنده مسؤل، m.mosapour@cfu.ac.ir mosapor110@gmail.com

۲. دانشجوی کارشناسی رشته آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، رشت، ایران، sepide.shahmohammadzade@yahoo.com

## مقدمه

پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه‌ای از تلاش‌های ریاضیدانان در جهت رفع دشواری‌های مربوط به محاسبه‌هایی دانست که در هندسه و اخترشناسی، دانشمندان با آن‌ها مواجه بوده‌اند (ربانی فرد، ۱۳۸۶: ۹). مثلثات زاینده احتیاج به محاسبات عملی، به خصوص محاسبه اجزای مختلف اشکال هندسی وقتی تعداد کافی از آن اجزا معلوم است، می‌باشد. مطالعات نجومی، ریاضیدان‌های بابل قدیم و یونان را به سمت مطالبی کشانده بود که می‌توان آن را به عنوان مقدمه پیدایش مثلثات به حساب آورد. اگرچه ریاضیدانانی مانند ارشمیدس، هیپارک، بطلمیوس و ... کارهای مهمی در علم مثلثات انجام داده‌اند اما گام اصلی در پیشرفت مثلثات را خواجه نصیرالدین طوسی برداشت. او با تالیف کتاب "کشف القناع فی اسرار شکل القطع"، در حقیقت اولین کتاب را در علم مثلثات نوشت (نصیری، ۱۳۸۸: ۱۲).

در دنیای امروزی نقش ریاضیات در صورت بندی نظام عالم و تبیین پدیده‌ها بر کسی پوشیده نیست و مثلثات برای صورت بندی پدیده‌های هارمونیک نقش ویژه‌ای دارد. بنا به اصول و استانداردهای برنامه شورای ملی معلمان ریاضی، برنامه ریاضی باید شامل مثلثاتی باشد که همه دانش‌آموزان بتوانند آن را برای حل مسائل مربوط به مثلث‌ها به کار ببرند و برای صورت بندی پدیده‌های متناوب از آن استفاده کنند (ربانی فرد و گویا، ۱۳۸۸: ۴).

نقش مثلثات در مهندسی، نقشه برداری و اخترشناسی انکارناپذیر است. همچنین مختصات به عنوان دانش پایه‌ای برای مختصات قطبی و توابع مختلط و آنالیز مختلط است. همان طور که علامه (۱۳۹۲) بیان می‌کند: "یکی از موضوعات مهم در برنامه درسی ریاضیات دبیرستانی، مثلثات است که برای فهمیدن موضوع‌های دیگر درسی چون فیزیک نیوتونی، نقشه برداری و شاخه‌های مهندسی، لازم است و یکی از شاخه‌های ریاضی است که جبر را با هندسه پیوند می‌زند". در واقع، مثلثات در همه زمینه‌های دانش بشری (از علوم نظری گرفته تا صنایع و فنون) ریشه دوانیده و بدون استفاده از آن همه رشته‌های علمی دچار نوعی توقف می‌شوند (شهریاری، ۱۳۷۹: ۳۴).

صرف نظر از کاربردهای عملی مثلثات در محاسبات و حل اشکال هندسی و استفاده از نتایج آن‌ها در دروس دیگر، طرح مثال‌های متنوع و زیبا از توابع مثلثاتی در بحث‌های حد و پیوستگی و مشتق و انتگرال، در تعمیق آموزش این مفاهیم، نقشی اساسی دارد. آموزش و طرح مثلثات در کتب درسی، ضرورتی انکارناپذیر است (نصیری، ۱۳۸۸: ۱۲).

اهمیت آموزش مثلثات در ریاضی دبیرستانی ضرورتی انکارناپذیر است. اما متأسفانه فراگیران در مرحله اول یادگیری آن با مشکلاتی مواجه‌اند و برخی از پژوهش‌ها و تجربه‌های تدریس بسیاری از معلمان

ریاضی حاکی از آن است که دانش آموزان معمولاً در درک و فهم مفاهیم پایه ای مرتبط با آن با چالش های جدی مواجه هستند و برای آن ها در مقایسه با مباحث دیگر ریاضی مدرسه ای دشوارتر و انتزاعی تر است. دانش آموزان بدهمی های متعددی در ارتباط با مثلثات دارند و شناسایی این بدهمی ها اهمیت زیادی در شناخت و اتخاذ روش های تدریس مناسب خواهند داشت (امیری و یافتیان، ۱۳۹۸: ۱۵۳).

در برخی مطالعات خطا و بدهمی به صورت نادرستی به جای یکدیگر به کار برده می شود. خطاها و بدهمی ها اگر چه به هم مرتبط هستند اما باهم متفاوت بوده و نباید آن ها را یکسان دانست. خطا به عنوان اشتباه، خطای سهوی و بی دقتی تعریف می شود (لوتنا و ماکونی ۲۰۱۰ به نقل از زهره وند و دیگران، ۱۳۸۷).

بدهمی ها خطاهای نظام مندی هستند که دارای یک ساختار محکم اند و به راحتی اصلاح نمی شوند. فردی که دچار خطا میشود با اندکی تذکر میتواند به خطای خود پی ببرد و آن را اصلاح کند؛ اما کسی که دچار بدهمی است، اشتباه خود را توجیه میکند. بدهمی ها به صورت مستقل وجود ندارند و در قالب یک چارچوب مفهومی خاص بروز می کنند. بنابراین یکی از اهداف کلیدی در اصلاح بدهمی های ریاضیات تغییرات چارچوبی مفهومی دانش آموزان از مطالب می باشد (سویگور، ۲۰۰۸، به نقل از زهره وند و دیگران، ۱۳۸۷).

مثلثات یکی از موضوعات ریاضی در مدرسه است که دانش آموزان کمی به آن علاقه دارند و تعداد کمی در آن موفق هستند. بیشتر دانش آموزان با دشواری هایی در یادگیری مثلثات مواجه هستند. مثلثات منطقه - ای از ریاضیات است که دانش آموزان معتقدند در مقایسه با سایر دروس ریاضیات، بسیار دشوار و انتزاعی است (کارتیکیان، ۲۰۱۷: ۴۴). مثلثات موضوعی است که بیشتر دانش آموزان آن را دشوار می بینند (مکانان و دیگران، ۲۰۱۸: ۶۸۹). مثلثات شامل مفاهیم گوناگونی همچون تعریف نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس و قوانین بین آن ها، نمودار توابع مثلثاتی، معادلات مثلثاتی و ... است. به علاوه، مثلثات پیش نیاز حساب است چون در حساب با موضوعاتی مثل حد، مشتق و انتگرال توابع مثلثاتی سر و کار داریم. همچنین مثلثات در بردارها و انتقال در فضای سه بُعدی نیز کاربرد دارد. بنابراین عدم درک مثلثات در ریاضیات مدرسه ای، نه تنها مثلثات را تحت تاثیر قرار می دهد، بلکه بر یادگیری درس های مربوط به حساب مقدماتی نیز تاثیر گذار است (مکانان و دیگران، ۲۰۱۸: ۶۸۹).

تال و بلاکت (۱۹۹۱) دریافتند که دانش آموزان در نخستین مرحله یادگیری توابع مثلثاتی با مشکل روبه رو هستند. در نتیجه لازم است به این موضوع توجه ویژه شود و بدفهمی ها و مشکلات یادگیری دانش - آموزان در رابطه با مثلثات مورد مطالعه قرار بگیرد (به نقل از ربانی فرد و گویا، ۱۳۸۸: ۴).

مثلثات دانش آموزان را با چالش هایی مواجه می کند که قبلاً تجربه نکرده بودند: آن ها باید نمودارهای مثلث ها را با روابط عددی مرتبط کنند و با نمادهای موجود در این روابط، دست ورزی کنند. علاوه بر این ها به طور معمول، توابع مثلثاتی جزو اولین توابعی هستند که دانش آموزان، نمی توانند مقادیر آن ها را مستقیماً با انجام اعمال حسابی، به دست آورند. با وجود اهمیت مثلثات و دشواری های بالقوه ای که دانش آموزان در یادگیری آن دارند، تحقیقات نسبتاً اندکی در این حوزه، انجام شده است (وبر، ۱۳۹۷: ۳۴).

وجود اشتباهات مفهومی و بدفهمی ها، دانش آموزان را در حل مسئله های مثلثاتی، دچار مشکل نموده و باعث می شود حتی برای حل بعضی از مسائل معمولی ریاضی که دانش مورد نیاز را هم برای حل آن ها در اختیار دارند، به نتیجه نرسند و تلاش آن ها، با شکست مواجه گردد (علامه و گویا، ۱۳۹۲: ۳). بنابراین ضروری است که هر چه بیشتر و بهتر با این بدفهمی ها آشنا شویم.

### برخی از بدفهمی های شناسایی شده و مشکلات موجود در مثلثات

در این بخش، برخی از بدفهمی های مثلثات که در پژوهش ها شناسایی شده اند را بیان می کنیم. چون نخستین گام برای رفع بدفهمی ها را می توان شناسایی آن ها دانست.

امیری و یافتیان (۱۳۹۸) با بررسی دانش آموزان پایه یازدهم، بدفهمی هایی را درباره مثلثات در دانش - آموزان، شناسایی کردند که می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- مفهوم اندازه زاویه را به خوبی درک نکرده اند.

- واحدهای اندازه گیری زاویه یعنی درجه و رادیان را به درستی نمی شناسند و به خصوص با رادیان ارتباط خوبی برقرار نمی کنند. به طور مثال، ۱ رادیان را به اشتباه برابر  $180^\circ$  در نظر می گرفتند و نتیجه می گرفتند که  $\sin 1 = \sin 2 = \sin 3$ .

- روش تعیین مقدار تقریبی سینوس یا کسینوس یک زاویه را روی دایره مثلثاتی و با توجه به محورهای سینوس و کسینوس نمی دانند.

- در تعیین حدود تغییرات نسبت های مثلثاتی زوایای نامشخص، توانایی کافی ندارند.

- قادر به تخمین مقدار تقریبی نسبت های مثلثاتی زاویه های نامشخص نیستند. به عنوان مثال به نادرست می نویسند که  $\cos \frac{\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{8}$  ، چون فکر می کنند که هرچه زاویه بزرگتر باشد، کسینوس آن بیشتر می شود.

رنجبر (۱۳۹۷) در پژوهش خود روی دانش آموزان سال یازدهم ریاضی دریافت که اغلب دانش آموزان درک و فهم مناسبی از رادیان ندارند. بدفهمی های دانش آموزان از مفهوم رادیان شامل تداخل زبانی، اشتباهات محاسباتی، عدم درک مناسب از تعریف درجه، ناتوانی در برقراری ارتباط بین مفهوم رادیان و مفهوم کمان، برابر گرفتن یک رادیان و ۱۸۰ درجه و درک رادیان محدود به فرمول میباشند. علامه و گویا (۱۳۹۳) در پژوهش خود روی دانش آموزان سال دهم متوسطه، بدفهمی های زیر را در مثلثات شناسایی کردند:

- مفهوم اندازه زاویه را به خوبی درک نمی کنند.

- با مقیاس رادیان برای اندازه زاویه، ارتباط برقرار نمی کنند و با مشکل مواجه هستند.

- در تخمین و تعیین محدوده نسبت های مثلثاتی زاویه های ناشناخته، ناتوان اند و دچار مشکل می شوند.

- در مقایسه با دایره مثلثاتی، بیشتر برای حل مسئله های مثلثاتی از مثلث قائم الزاویه استفاده می کنند و به خوبی از دایره مثلثاتی برای حل مساله نمی توانند استفاده کنند.

- نسبت های مثلثاتی را توابع خطی می دانند.

از جمله بدفهمی هایی که ریحانی و همکاران (۱۳۹۱) در دانش آموزان دبیرستانی مشاهده کردند می توان عدم درک نمادهای ریاضی و چگونگی به کارگیری آن ها در بیان گزاره های ریاضی را نام برد. دیگر بدفهمی مشاهده شده در دانش آموزان، بیش تعمیمی یا تعمیم نابجای قواعد به کار رفته در مورد مفاهیم ریاضی بود. به طور مثال دانش آموزی عبارت های زیر را نوشته بود:

$$3y = \cos x \rightarrow y = \frac{1}{3} \cos x \rightarrow y = \cos x$$

این مثال نشان می دهد که دانش آموز، مفهوم کسینوس یک زاویه را درک نکرده است. به علاوه در ساده کردن عبارت ها دچار اشتباه شده است که این اشتباه ممکن است ناشی از تعمیم نادرست قوانین ساده کردن کسرها باشد. یا دانش آموزان در پاسخ به این سوال که "آیا تابع  $y = \cos x$  معکوس پذیر است؟" پاسخ داده بودند که چون شرط معکوس پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است و تابع  $y = \cos x$  یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نیست. به نظر می رسد که این دانش آموزان از

گزاره "اگر تابعی یک به یک باشد، معکوس پذیر است" به صورت طوطی وار در پاسخ‌های خود استفاده کردند (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱: ۴۰-۴۱).

داده‌های حاصل از پژوهش ربانی فرد (۱۳۸۶) نشان داد که اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مثلثات نسبتاً زیاد است و اغلب آن‌ها درک صحیحی از مفاهیم مثلثاتی ندارند. عمده‌ترین بدفهمی‌های شناسایی شده در پژوهش وی به این صورت بود که دانش‌آموزان:

- درک صحیحی از مفهوم رادیان نداشتند.
- توابع مثلثاتی را خطی در نظر می‌گرفتند.
- در تخمین سینوس و کسینوس زوایایی که غیر معمول است، مانند زاویه ۲۳ درجه، با مشکل مواجه بودند.

-تصور خوبی از دایره مثلثاتی نداشتند و نمی‌توانستند آن را برای حل مسائل مثلثاتی به کار ببرند. فارودین و همکاران (۲۰۱۹) در پژوهش خود با بدفهمی‌های زیر در دانش‌آموزان مواجه شدند: دانش‌آموزان مفهوم دوره تناوب را در توابع مثلثاتی درک نمی‌کنند. مقادیر مثلثاتی را در زاویه‌های خاص، فراموش می‌کنند. اسامی توابع مثلثاتی را به اشتباه می‌نویسند و فرمول‌های مثلثاتی را برای حل مسائل به درستی انتخاب نمی‌کنند.

هدف ریاضی تنها حفظ رویه‌ها نیست بلکه دانش‌آموزان بایستی ریاضی را بفهمند و کامل درک کنند بتوانند توضیح دهند چرا رویه‌هایی که به کار می‌برند مناسب‌اند و استدلال کنند چرا مفاهیم ریاضی خواصی دارد که به آن‌ها اجازه استفاده از آن رویه‌ها را می‌دهد (NCTM 2000)، به نقل ربانی فرد و گویا، (۱۳۸۸: ۷).

نتایج پژوهش مکان و همکاران (۲۰۱۸) نشان داد که دانش‌آموزان یادگیری ضعیفی از مثلثات به ویژه در خواص مثلثاتی دارند. به علاوه، دانش‌آموزان نمی‌توانستند دلیل درستی عبارت‌هایی را که نوشتند توضیح دهند.

نتایج پژوهش کارتینان (۲۰۱۷) نشان داد که دانش‌آموزان در مثلثات فقط به حفظ کردن فرمول اکتفا می‌کنند و اغلب نمی‌توانند آن را توضیح دهند. به طور مثال دانش‌آموزان فرمول  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  را می‌دانستند ولی تعداد کمی از آن‌ها می‌توانستند نحوه به دست آوردن آن را شرح بدهند.

کندل و استیسی (۱۹۹۷) مشاهده کردند که بیشتر دیدگاه‌ها برای تدریس مثلثات از جمله دیدگاه مثلث قائم الزاویه، به دانش آموزان اجازه نمی‌دهند که سینوس و کسینوس را به عنوان تابع، درک کنند (به نقل از ربانی فرد، ۱۳۸۶: ۶).

### راهکارهایی برای رفع بدفهمی های موجود در مثلثات

در این بخش به شرح سه راهکار پیشنهادی برای رفع بدفهمی های مثلثات می‌پردازیم که دبیران در آن‌ها دارای نقش کلیدی هستند.

#### ۱. انتخاب روش تدریس مناسب

برای شناخت و رفع اشکالات مفهومی دانش آموزان، آن‌ها باید مجال طرح ایده‌هایشان را پیدا کنند و فعالیت‌های گروهی در کلاس درس، می‌تواند چنین وضعیتی را فراهم کند. به همین دلیل، به نظر می‌رسد که روش سخنرانی که در آن معلم به صورت یکطرفه به توضیح و تکرار یک موضوع می‌پردازد، کمکی به رفع بدفهمی های دانش آموزان نمی‌کند و بنابراین اتخاذ روش‌های دیگر تدریس، ضروری به نظر می‌رسد (ربانی فرد و گویا، ۱۳۸۸: ۹). بنابراین استفاده از روش‌های تدریس فعال و گروهی می‌تواند در بهبود یادگیری مثلثات موثر باشد.

اگر مثلثات را فقط به روش سخنرانی تدریس کنیم، این درس برای دانش آموزان خیلی انتزاعی می‌شود. روش سخنرانی، امکانات خیلی محدودی برای تدریس مثلثات دارد (ویر، ۲۰۰۵ به نقل از فارودین و همکاران، ۲۰۱۹: ۶).

ربانی فرد (۱۳۸۶) پیشنهاد می‌کند که معلمان باید در روش‌های تدریس ریاضی تجدید نظر کنند و با استفاده از رهیافت یادگیری هوشمند معنادار، در کاهش بدفهمی های مثلثاتی دانش آموزان بکوشند. فارودین و همکاران (۲۰۱۹) یکی از علت‌های بدفهمی های دانش آموزان در مثلثات را یادگیری حافظه‌ای و طوطی وار و فراموش کردن مطالبی می‌دانند که آموخته‌اند. بنابراین یکی از راه‌های پیشنهادی این پژوهشگران، روش‌های فعال یادگیری است. چون در یادگیری اکتشافی مطالب در ابتدا به صورت نهایی خود ارائه نمی‌شوند و این فرصت را فراهم می‌کند که دانش آموزان خودشان مفهوم را پیدا و کشف کنند.

همان طور که پژوهش یوسف زاده (۱۳۹۵) نشان داد، آموزش مثلثات با تاکید بر فهم و درک مفهومی روابط مثلثاتی، شناخت مفهوم زاویه و دایره مثلثاتی و همچنین شناخت معلم از بدفهمی های دانش آموزان

در مبحث مثلثات باعث تغییر در روش تدریس و در نتیجه جلوگیری از ایجاد بدفهمی دانش آموزان خواهد شد.

ماهیت سلسله مراتبی ریاضی باعث می شود تا هرگونه نقص در مراحل یادگیری یک مفهوم ریاضی، به مراحل بالاتر انتقال پیدا کرده و یادگیری را دچار اختلال کند. بنابراین مهم است که سنگ بنای یادگیری مثلثات را به طور درست و اصولی و مفهومی پایه گذاری کنیم.

## ۲. استفاده از ماشین حساب و نرم افزارها

استفاده از ابزارهایی مانند ماشین حساب، این امکان را برای دانش آموزان فراهم می کند که توجه خود را از محاسبات طولانی و خسته کننده و رسم نمودارهای پیچیده به یادگیری مفاهیم مثلثاتی بیشتر معطوف کنند. درک مفهومی مثلثات باعث بهبود یادگیری آن می شود.

علامه و گویا (۱۳۹۳)، اظهار کرده اند که به احتمال زیاد، مشکلات دانش آموزان در توسعه روابط مثلثاتی، چند وجهی بودن دانش لازم برای درک آن هاست. دانش آموزان با درک نسبت های مثلثاتی و کمک گرفتن از ماشین حساب، قادر خواهند بود تا طول اضلاع مجهول، زاویه مجهول و در مسائل کلامی، با مدل سازی مسئله به کمک مثلث قائم الزاویه، مقادیر مجهول مسئله را بیابند.

معلمان با استفاده از نرم افزارها و رایانه به جای سخنرانی و ارائه اطلاعات، فرصت کافی پیدا می کنند تا به راهنمایی دانش آموزان و مدیریت منابع بپردازند. به علاوه با انجام این کار معلم با تغییر نقش خود از "انتقال دهنده" به "تسهیل کننده" می تواند فعالیت های دانش آموز را که نتیجه آن یادگیری است، بهتر هدایت کند. همچنین فرآیند یادگیری از طریق امکانات جبری و ترسیمی، باعث استفاده بهینه از وقت کلاس و تثبیت آموخته های دانش آموزان می گردد. بنابراین استفاده از نرم افزارهای ریاضی مانند جئوجبرا می تواند گامی موثر در ارتقای یادگیری درس ریاضی ایفا کند (موسی پور، ۱۳۹۵).

جئوجبرا یک نرم افزار ریاضی پویا در یک بسته آموزشی یکپارچه و برای یادگیری آسان ریاضی در همه پایه های دوره متوسطه است. این نرم افزار پیوند دهنده هندسه، جبر، جداول و ترسیمات گرافیکی است. جئوجبرا یک نرم افزار کدباز، رایگان و قابل دسترس است. این نرم افزار در مقایسه با دیگر نرم افزارهای مشابه، از نظر توانمندی ها، امکانات ترسیمی، رابط کاربردی، وسعت عمل و محتوای آموزشی، مناسب ترین گزینه برای معلمان و دانش آموزان در آموزش و یادگیری ریاضیات محسوب می شود (قربانی، ۱۳۹۱).



رحمان و همکاران (۲۰۱۶) بیان می کنند که جئوجبرا می تواند کمک کند تا دانش آموزان ضعیف تر، مثلثات را به روشی ساده و جالب فراگیرند. نرم افزار جئوجبرا می تواند انگیزه این دانش آموزان را برای یادگیری مثلثات افزایش دهد.

برای اینکه مطالب مربوط به مثلثات عینی تر شود، معلمان می توانند از جئوجبرا استفاده کنند. در جئوجبرا می توان به آسانی تابع ها را برای یادگیری موضوعاتی همچون دوره تناوب، مورد بررسی قرار داد. عینی سازی مفاهیم مثلثاتی و همچنین ترسیم نمودارهای توابع مثلثاتی می تواند دانش آموزان را به یادگیری بیشتر، ترغیب کند (فارودین و همکاران، ۲۰۱۹: ۶).

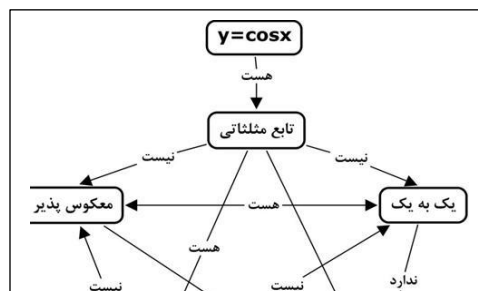
### ۳. استفاده از نقشه های مفهومی

برای اینکه یادگیری معنادار تحقق یابد، باید از روش هایی استفاده کنیم که اطلاعات جدید را به دانسته های قبلی مرتبط کنند. یکی از روش هایی که می تواند این ارتباط را برقرار کند، نقشه مفهومی است. معلمان نیز می توانند با کمک نقشه مفهومی ترتیب و توالی موضوعی بهتری را طراحی کنند (موسی پور و همکاران، ۱۳۹۸: ۳۹).

نقشه ی مفهومی ابتدا با هدف بهبود یادگیری ایجاد شد ولی مطالعات بعدی نشان داد که این نقشه ها ابزار مفیدی برای خلاصه کردن مطالب آموخته شده، افزایش درک و فهم، حمایت از یادگیری مشارکتی و ... هستند (سعیدی و دیگران، ۱۳۹۲).

ساختار نقشه های مفهومی معمولاً سلسله مراتبی است یعنی مطالب کلی تر و جامع تر در راس آن قرار می گیرد و هر چه به پایین نقشه نزدیک می شویم مفاهیم و مطالب جزئی تر می شود. مفاهیم که با نام گره یا هسته نیز شناخته می شوند یک کلمه یا عبارت کوتاه هستند که در داخل یک کادر بسته مثل بیضی یا مستطیل قرار می گیرند.

مفاهیم به وسیله ی خطوط پیوندی برجسب دار که ماهیت رابطه بین دو مفهوم را نشان می دهند با یکدیگر ارتباط پیدا می کند. گاهی اوقات از خطوط پیکان دار برای پیوندها استفاده می شود (سعیدی و دیگران، ۱۳۹۲). در شکل ۱، نمونه ای از یک نقشه مفهومی در مثلثات نشان داده شده است.



### شکل ۱. نقشه‌ای مفهومی از تابع مثلثاتی کسینوس (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱: ۳۵)

پژوهش ریحانی و همکاران (۱۳۹۱) نشان داد که نقشه‌های مفهومی قادرند بدفهمی‌های دانش‌آموزان را در مورد توابع مثلثاتی نشان دهند به گونه‌ای که تشخیص برخی از این بدفهمی‌ها تنها با استفاده از آزمون کتبی امکان‌پذیر نبود. همچنین نتایج تحقیق آنان نشان داد که استفاده از نقشه‌های مفهومی به عنوان ابزار ارزیابی، باعث ارتقای یادگیری دانش‌آموزان می‌شود. نقشه‌های مفهومی به عنوان ابزار ارزیابی، موقعیتی را برای دانش‌آموزان فراهم کردند که در آن همزمان با ارزیابی یادگیری، یادگیری هم صورت گرفته است (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱: ۴۶).

کامل کردن نقشه‌های مفهومی قبل از آزمون کتبی باعث شده است که دانش‌آموزان سازماندهی ذهنی بهتری نسبت به موضوع پیدا کنند و در نتیجه به سوالات آزمون کتبی، بهتر جواب بدهند (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۱: ۳۷). در واقع همان طور که کیمچین (۲۰۰۶) نیز اشاره می‌کند، زمانی که در فرآیند آموزش، معلمان از نقشه‌های مفهومی جهت ارائه درس استفاده می‌کنند به مفاهیم مهم و رابطه‌ی آن‌ها با سایر مفاهیم توجه بیشتری خواهند کرد که این سبب بهره‌وری در برنامه‌های کلاسی شده و افزایش حس رضایت دانش‌آموزان و بیشتر شدن انگیزه آن‌ها در یادگیری مطالب ارائه شده رانیز در پی دارد.

### بحث و نتیجه‌گیری

همواره در آموزش مفاهیم ریاضی به دانش‌آموزان، با بدفهمی‌هایی مواجه می‌شویم که در ذهن دانش‌آموزان به وجود می‌آید. بنابراین اگر بتوانیم این بدفهمی‌ها را بشناسیم و برای رفع آن‌ها اقدام کنیم، به یادگیری بهتر آن‌ها کمک کرده ایم. مثلثات از جمله مفاهیم موضوعات ریاضی در دوره متوسطه که دانش‌آموزان آن را سخت و

انتزاعی می‌بینند و با بدفهمی‌هایی در یادگیری آن رو به رو هستند، که دبیران می‌توانند نقش کلیدی در رفع بدفهمی‌ها در مثلثات ایفا کنند.

در این راه استفاده از روش‌های تدریس فعال و مشارکتی، بسیار کمک‌کننده است. به ویژه استفاده از ابزارهایی مانند ماشین حساب و نرم افزارها می‌تواند آموزش را برای دانش‌آموزان جالب‌تر و جذاب‌تر کند که این امر به نوبه خود باعث افزایش دقت و تمرکز دانش‌آموزان و کاهش بدفهمی‌های ایجاد شده در آنان می‌شود. استفاده از روش‌های جدید برای ارزیابی نیز می‌توان کمک‌کننده باشد. یادگیری ضمن ارزیابی هم از نکاتی است که می‌تواند برای شناسایی و رفع بدفهمی‌ها، مد نظر آموزشگران قرار بگیرد. استفاده از نقشه‌های مفهومی را می‌توان به عنوان روش جدیدی برای ارزیابی در نظر گرفت که در آن ضمن ارزیابی، یادگیری هم رخ خواهد داد.

## منابع

- امیری، پریسا و یافیان، نرگس (۱۳۹۸). شناسایی بدفهمی های دانش آموزان از نسبت های مثلثاتی. *فصلنامه کنفرانس آموزش ریاضی ایران*، تبریز، ۱۵۹-۱۵۳.
- ربانی فرد، علی اکبر و گویا، زهرا (۱۳۸۸). بررسی بدفهمی ها به عنوان یکی از موانع اصلی ایجاد درک مثلثات در دانش آموزان. *رشد آموزش ریاضی*. دوره بیست و ششم، شماره ۴-۱۱-۴.
- ربانی فرد، علی اکبر (۱۳۸۶). *مشکلات و بدفهمی های دانش آموزان در رابطه با مثلثات*. پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی تهران.
- رضائی، مانی (۱۳۹۳). بررسی کتاب های درسی ریاضی دوره متوسطه از شروع آموزش رسمی در ایران. *دو فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی*. سال دوم شماره ۳-۹۲-۷۱.
- ریحانی، ابراهیم، بخشعلی زاده، شهرناز و استادی، مریم (۱۳۹۱). تاثیر کاربرد نقشه های مفهومی بر درک دانش آموزان رشته ریاضی از توابع مثلثاتی. *رویکردهای نوین آموزشی*. سال هفتم شماره ۲-۵۲-۲۳.
- رنجبر، حسن (۱۳۹۷). *بررسی درک و فهم دانش آموزان پایه یازدهم رشته ریاضی از مفهوم رادیان*. پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی تهران.
- زهره نوند، شیماء، مشهودی، شاهد و حیدری، محمد جواد (۱۳۸۷). چرا و چگونه دانش آموزان در درس ریاضی بیشتر اشتباه می کنند؟ (تجربه هایی از بدفهمی های آموزش کسرها از کتاب جدید پنجم ابتدایی). *فصلنامه کنفرانس آموزش ریاضی ایران*، دانشگاه یزد.
- سعیدی، علی، سیف، علی اکبر، اسدزاده، حسن و ابراهیمی قوام، صغری (۱۳۹۲). مقایسه اثربخشی شیوه های ارائه و تهیه نقشه های مفهومی بر درک مطلب. *مجله روان شناسی مدرسه*. دوره ۲ شماره ۳-۱۴۳-۱۲۵.
- شهریاری، پرویز (۱۳۷۹). *سرگذشت ریاضیات*. تهران: انتشارات مهاجر.
- علامه، مجتبی و گویا، زهرا (۱۳۹۳). بدفهمی های دانش آموزان از مباحث مثلثات. *مجله رشد آموزش ریاضی*. دوره ۳۲ شماره ۲-۲۷-۱۳.
- قربانی، مهدی (۱۳۹۱). *کارگاه ریاضی با Geogebra*. تهران: نشر کیان دانش.
- موسی پور، منصوره، پور تقی کوهن، بهاره و تقی پور، آمنه (۱۳۹۸). راهبردهایی برای ارتقای توانایی حل مسئله در ریاضی. *پویش در آموزش علوم پایه*. دوره پنجم شماره ۱۷-۴۶-۳۵.
- موسی پور، منصوره (۱۳۹۵). *جئوجبرا و آموزش خط و معادله های خطی ریاضی نهم دوره اول متوسطه*. چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شیراز.
- نصیری، قربانعلی (۱۳۸۸). نیاز به توجه بیشتر به آموزش مثلثات. *رشد آموزش ریاضی*. دوره بیست و ششم شماره ۴-۱۲-۱۴.

وبر، کیت (۱۳۹۷). تدریس توابع مثلثاتی؛ درس های برگرفته از تحقیق. ترجمه: حسینی، فرید و فرهادی، حمید، رشد آموزش ریاضی. دوره ۳۶ شماره ۲. ۴۰-۳۴.

یوسف زاده، درنه (۱۳۹۵). بررسی بدهمی های دانش آموزان پایه دوم متوسطه رشته ریاضی در میحث مثلثات (مطالعه موردی: مدارس دخترانه آموزش و پرورش ناحیه یک بندرعباس در سال تحصیلی ۱۳۹۵-۱۳۹۴). پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرعباس.

Kimchin, I. M. (2006), Concept mapping, Powerpoint, and Pedagogy of access. *Journal of Biology Education*, 40, 79-83.

Fahrudin, D., Mardiyana, and Pramudya, I. (2019), Profile of students' errors in trigonometry Equations. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, **11880**12044.

Rahman, M. H., Puteh, M. (2016), Learnign trigonometry using GeoGebra learning module: Are under achieve pupils moyivated? *AIP Cof. Proc.* **17500**40001.

Karthikeyan, R. (2017), Trigonometry learning for the school students in mathematics. *IRE Journals*, 1(5), 44-49.