Research in Mathematics Education **http://rme.cfu.ac.ir**
Vol. 2, No. 4, Winter 2022
pp.1-14

Improving The Learning of Pythagoras' Theorem By 5E Teaching Model

Amir Esmaeili Korani*[1], Shahriar Sakenian Dehkordi[2]

[1]Farhangian University, Isfahan Shahid Bahonar Campus, Iran
[2]Master of Mathematics Education, Mathematics Teacher of Shahrekord, Iran

Abstract: Pythagoras' theorem is one of the fundamental theorems of flat geometry in mathematics that students have problems in using it in new situations. The purpose of this article is improving students' performance in using the Pythagorean theorem and fixing their misconceptions by 5E teaching model. The following article was a qualitative research based on action research method. Based on purposive sampling, 10 high school students of Allameh Tabatabaei in Shahrekord city were selected as the sample. The findings of this study showed that the use of 5E constructivist model led to deeper learning, fixing students' misconceptions and improving their performance in solving problems related to the Pythagorean theorem.

Keywords: Action Research, Constructivist, 5E Teaching Model, Pythagorean Theorem

* Corresponding Author, Email: a_esmaeili_k@yahoo.com

پژوهش در آموزش ریاضی
دوره ۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰
صفحات ۱۴-۱
http://rme.cfu.ac.ir

بهبود یادگیری قضیه فیثاغورس به کمک الگوی تدریس 5E

امیر اسماعیلی‌کرانی[1]*، شهریار ساکنیان‌دهکردی[2]

[1]دانشجوی کارشناسی آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان شهید باهنر اصفهان
[2]دبیر ریاضی شهرکرد، کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده: قضیه فیثاغورس یکی از قضایای بنیادی هندسه مسطحه در ریاضیات است که دانش آموزان در استفاده و به کار بردن آن در موقعیت های تازه مشکل دارند. هدف این مقاله، بهبود عملکرد دانش آموزان در استفاده از قضیه فیثاغورس و رفع بدفهمی های آن ها به کمک الگوی تدریس 5E است. پژوهش حاضر، پژوهشی کیفی و بر اساس روش تحقیق اقدام پژوهی انجام گرفت. بر اساس نمونه گیری هدفمند، ۱۰ نفر از دانش آموزان دبیرستان متوسطه دوره دوم نمونه علامه طباطبایی شهرستان شهرکرد به عنوان نمونه انتخاب شدند. یافته های این پژوهش نشان داد، استفاده از الگوی ساخت گرایی 5E منجر به یادگیری عمیق تر، رفع بدفهمی دانش آموزان و بهبود عملکرد آنان در حل مسائل مربوط به قضیه فیثاغورس شد.

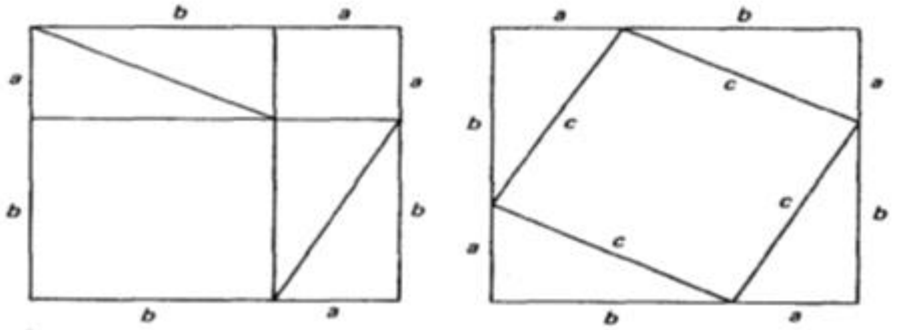
واژگان کلیدی: اقدام پژوهی، الگوی تدریس 5E، ساخت گرایی، قضیه فیثاغورس

* نویسنده مسئول، رایانامه: a_esmaeili_k@yahoo.com

مقدمه

قضیه فیثاغورس یکی از قضایای بنیادی هندسه مسطحه در ریاضیات است، بنا به گفته یکی از افسانه ها به ظاهر فیثاغورس قضیه خود را هنگامی که در تالار های اصلی کاخ پلی کرات برای پذیرفتن عضو در انجمن برادری ایستاده بود کشف کرد (دارکو ولجین ، ۲۰۰۰). افتخار بزرگ فیثاغورس را در کشف رابطه‌ای می دانند که بین طول ضلع های مثلث قائم الزاویه وجود دارد؛ مجذور وتر مثلث قایم الزاویه مساوی مجموع مجذورات دو ساق است. حالت های خاص این قضیه را پیش از فیثاغورس در سرزمین های دیگر می دانستند؛ از جمله مصری ها و بابلی ها می دانستند که مثلث با ضلع هایی به طول ۳ و ۴ و ۵ یک مثلث قائم الزاویه است. ولی اولین برهان کلی توسط فیثاغورس ارائه شد (آشنایی با تاریخ ریاضیات، هاورد.ایوز، ۱۹۸۳).

امروزه بیش از صدها اثبات برای قضیه فیثاغورس وجود دارد، البته اثبات خود فیثاغورس به ما نرسیده است چه بسا یکی از این اثبات ها متعلق به فیثاغورس یا شاگردان او باشد. مدل های زیادی درباره ی برهانی که فیثاغورس ممکن است عرضه کرده باشد، وجود دارد و عموما چنین تصور می شود که برهان مزبور از نوعی تقطیع یا تشریح مربع به طول ضلع a+b با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه ای به طول های a، b، c است (شکل ۱) (آشنایی با تاریخ ریاضیات، هاورد.ایوز، ۱۹۸۳).



شکل ۱. اثباتی از قضیه فیثاغورس (از کتاب chou pei suan ching ؛ نویسنده ناشناس ، ۲۰۰ سال پیش از میلاد)

نظریات یادگیری ساخت گرایی بر این باور بنا شده اند که که یادگیرنده، بر اساس تجربیات شخصی خود، دانش را می سازد. نظریه پردازان یادگیری ساختن گرا درباره این که انسان ها چگونه نظام هایی را برای فهم معنی دار جهان و تجربیاتشان می یابند، طرح ریزی می کنند. از نظر دیویی واقعیتی بدون تجربه وجود ندارد و واقعیتی که به وسیله تجربه متاثر نشود موجود نیست. نظرات پیاژه اساس جنبش سازنده گرایی فردی است و بر این فرض است که معنی در ذهن افراد از طریق اکتشاف با تمرکز بر فرایند جذب و انطباق دانش ساخته می شود (مبانی پایه نظریه ساختن گرایی، سلیمی، ۱۳۸۹). تاکید ساخت و ساز گرایی بر کمک به یادگیرندگان در خلق یا اصلاح الگوهای ذهنی است تا بتوان بر مبنای آن به دانش دست یافته و در نتیجه زمینه مناسب برای تجاربی که حصول دانش بیشتر را تسهیل کند، فراهم گردد (ساخت و ساز گرایی در آموزش ریاضی و اینترنت، جوامع، ۱۳۸۴).

در هشتمین کنگره جهانی آموزش ریاضی (ICME) که هدف آن کمک به توسعه ی آموزش ریاضی در زمینه تحقیق، تدریس و یادگیری بود؛ ویژگی های آموزش ساخت گرا را چنین می دانند: ۱– بنا نهادن آموزش بر پایه دانش قبلی دانش آموز ۲– انتظار از دانش آموزان برای فکر کردن و توضیح دادن ۳– پرسش و پاسخ ۴– بخشی از ریاضیات ابداع و خلاقیت و بخشی قرارداد و قاعده است. ۵– مفاهیم ریاضی از طریق حل مسئله مورد تحقیق و مطالعه قرار می گیرد.

هدف این مقاله، بهبود عملکرد دانش آموزان در استفاده از قضیه فیثاغورس و رفع بدفهمی های آن ها به کمک الگوی تدریس 5E است. در این الگوی تدریس دانش آموزان در تعامل با یکدیگر و با نظارت معلم، دانش و مفاهیم جدید را بر اساس دانش و تجربیات قبلی کاوش می کنند و به حل مسئله ها می پردازند. این چرخه یادگیری نه تنها به دانش آموزان کمک می کند که مفاهیم را یاد بگیرند، بلکه به آنان یاری می دهد که دانش جدید را در موقعیت های تعمیم یافته به کار ببرند و دیدگاه های غلط و بدفهمی های خود را درباره مفاهیم اصلاح کنند.

روش تحقیق

پژوهش حاضر، پژوهشی کیفی و بر اساس روش تحقیق اقدام پژوهی انجام گرفت. اقدام پژوهی به هر فعالیتی گفته می شود که منجر به تبدیل وضع موجود به وضع مطلوب شود. اقدام پژوهی فرآیندی است که در آن وضعیت آموزشی دانش آموزان به منظور بهبود یادگیری آنان مورد بررسی قرار می گیرد (قاسمی پویا، ۱۳۸۹). با این تفاسیر پژوهش حاضر بر اساس مراحل اقدام پژوهی مورد نظر قاسمی پویا (۱۳۸۹) انجام می شود. مراحل پژوهش در عمل از دیدگاه قاسمی پویا عبارتند از:

- تشخیص مسئله و تعیین عنوان
- توصیف وضع موجود و بیان مساله
- گردآوری اطلاعات شواهد ۱
- تجزیه و تحلیل و تفسیر داده ها
- انتخاب راه حل جدید
- اجرای راه حل و نظارت بر آن
- گرد آوری اطلاعات شواهد ۲
- ارزشیابی تاثیر اقدام جدید
- اعتباریابی و نتیجه گیری

مراحل پژوهش

توصیف وضع موجود و بیان مساله

معمولا دانش آموزان قضیه فیثاغورس را با رابطه ای بین اضلاع مثلث قائم الزاویه به یاد می آورند، در صورتی که پیرامون این قضیه ۲۵۰۰ ساله، در طول زمان همواره اندیشه های جالب و تعمیم های کاربردی ساخته می شود. در فرایند تدریس قضیه فیثاغورس توجه به پیشینه تاریخی و درگیر کردن دانش آموزان برای رسیدن به مفهوم و کاربرد های آن می تواند موجب بهبود چرخه یادگیری شود.

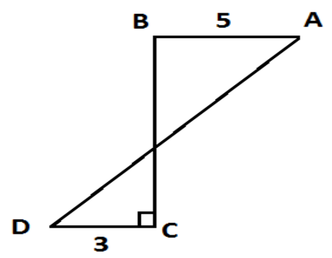
گردآوری اطلاعات شواهد ۱

جمع آوری داده ها با در نظر گرفتن نمونه آماری هدفمند، ۱۰ نفر از دانش آموزان دبیرستان نمونه علامه طباطبایی شهرستان شهرکرد و با بررسی راه حل دانش آموزان از طریق آزمون صورت گرفت: آزمون زیر با هدف بررسی ابعاد مفهوم قضیه فیثاغورس و کاربرد آن در مثلثات، نمایش اعداد گنگ، هندسه فضایی و ارتباط آن با قضیه تالس و تشابه طراحی شد. روایی آزمون توسط استاد راهنما (دکترای آموزش ریاضی) و معلم راهنما با سابقه (فوق لیسانس آموزش ریاضی) تایید شد.

---

۱. در شکل زیر BC = ٦ است ، طول AD را بدست آورید.

(هدف از طرح سوال: نشان دادن کاربرد قضیه فیثاغورس در محاسبه طول اضلاع با ایجاد مثلث قائم الزاویه)



---

۲. ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده بر وتر است .

(هدف از طرح سوال: نشان دادن کاربرد قضیه فیثاغورس در محاسبه طول اضلاع با ایجاد مثلث قائم الزاویه)

---

۳. بررسی کنید آیا اعداد $a = p^۲ - q^۲$ و $b = ۲pq$ و $c = p^۲ + q^۲$ می توانند فیثاغورسی باشند؟

(هدف از طرح سوال: بررسی سه تایی های فیثاغورسی)

---

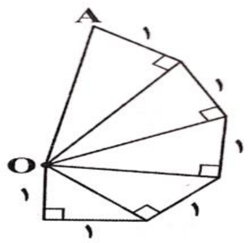
۴. قضیه کسینوس ها را به کمک قضیه فیثاغورس اثبات کنید.

(هدف از طرح سوال: نشان دادن کاربرد قضیه فیثاغورس در مثلثات)

---

۵. در شکل مقابل طول OA را محاسبه کنید .

(هدف از طرح سوال: نشان دادن کاربرد قضیه فیثاغورس در نمایش اعداد گنگ روی محور اعداد)

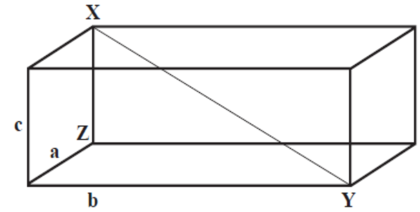


---

۶. در مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۲ یک مربع محاط کرده ایم ، طول ضلع مربع چقدر است ؟

(هدف از طرح سوال: ایجاد ارتباط بین قضیایای بنیادی تالس و فیثاغورس)

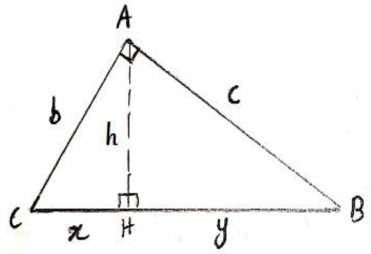
۷. در مکعب مستطیل زیر با اضلاع a و b و c ، طول قطر XY را محاسبه کنید .



تعمیم قضیه فیثاغورس در حالت فضایی

تجزیه و تحلیل و تفسیر داده‌ها

هر یک از سوالات داده شده برای بررسی حوزه ارتباطی خاصی از قضیه فیثاغورس استفاده می شود. در سوال ۱ به جای نامگذاری طول قسمت های مختلف و بررسی چند معادله چند مجهول، می توان با امتداد دادن خطوط و ایجاد یک مثلث قائم الزاویه، طول پاره خط AD را محاسبه کرد. فرایند حل این سوال به ایجاد ذهن تجسمی نیز کمک می کند. یکی از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه؛ مجذور ارتفاع وارد بر وتر برابر حاصل ضرب دو قسمت ایجاد شده روی وتر است و به عبارتی ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده بر وتر است (شکل ۲).



$$\left.\begin{aligned}\overset{\Delta}{ACH}&: h^2+x^2=b^2\\ \overset{\Delta}{ABH}&: h^2+y^2=c^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow b^2+c^2=2h^2+x^2+y^2 \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: b^2+c^2=(x+y)^2 \xRightarrow{(*)} 2h^2+x^2+y^2=x^2+2xy+y^2$$

$$\Rightarrow 2h^2=2xy$$

$$\Rightarrow h^2=xy$$

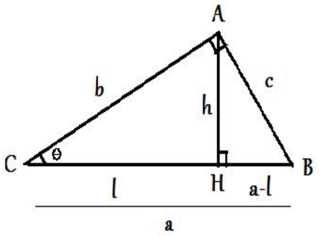
$$\xRightarrow{h>0} h=\sqrt{xy}$$

شکل ۲. ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه

اگر اضلاع مثلث هایی اعداد صحیح a و b و c باشند بطوریکه در رابطه $a^۲ + b^۲ = c^۲$ صدق کنند، چنین مثلثی قائم الزاویه است و به این مثلثها، مثلثهای فیثاغورسی و به اندازه اضلاع آنها سه گانه ی (سه تایی های) فیثاغورسی گوییم. فیثاغورس قاعده ای بدست آورد که طبق آن بتوان عدد های صحیحی برای مثلثهای فیثاغورسی بدست آورد. که این قاعده با چنین تساوی بیان می شود: $(۲n + ۱)^۲ + (۲n^۲ + n)^۲ = (۲n^۲ + ۲n + ۱)^۲$، که بجای n می توان هر عدد طبیعی دلخواهی قرار داد (در پی فیثاغورس، شهریاری، ۱۳۶۱). بعد ها تساوی های دیگری برای معین کردن عدد های فیثاغورسی پیدا شد که یکی از این موارد در سوال ۳ ذکر شده است.

در سوال ۴ به این می پردازیم که آیا می توان رابطه فیثاغورس را برای هر مثلث دلخواه به کار ببریم؟ پاسخ به این پرسش مثبت است و با قانونی به نام قضیه کسینوس ها بیان می شود؛ در هر مثلث مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع

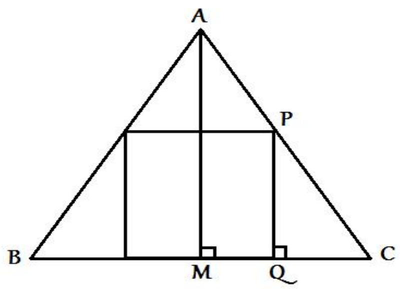
مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصلضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن دو ضلع (شکل ۳). که اگر $\theta = \frac{\pi}{۲}$ باشد؛ به همان رابطه فیثاغورس می رسیم.



$$\overset{\Delta}{ACH}: b^2 = h^2 + l^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - l^2$$
$$\overset{\Delta}{ABH}: c^2 = h^2 + (a-l)^2$$
$$\overset{\Delta}{ACH}: \cos\theta = \frac{l}{b} \Rightarrow l = b\cos\theta \quad (*)$$
$$\Rightarrow c^2 = b^2 - l^2 + (a-l)^2$$
$$\Rightarrow c^2 = b^2 - l^2 + a^2 - 2al + l^2$$
$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2al$$
$$\overset{*}{\Rightarrow} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

شکل ۳. قضیه کسینوس ها

یکی از قدیمی ترین نتیجه های قضیه فیثاغورس بحث بر قابل اندازه گیری بودن قطر یک مربع می باشد. این حقیقت نخستین نشانه وجود عدد های گنگ بود که دگرگونی ریاضیات پایه را برای رسیدن به عددهای حقیقی بر عهده داشت. چون فیثاغورسیان تحقیقات خود را بر روی مربع به ضلع یک انجام می دادند تا مدت ها $\sqrt{۲}$ تنها عدد گنگ شناخته شده بود. اما بعد ها بنا به گفته افلاطون، تئودوروس نشان داد که $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۶}$ و ... و $\sqrt{۱۷}$ عددهای گنگ هستند (دارکو ولجین، ۲۰۰۰). سوال ۵ یکی از کاربرد های قضیه فیثاغورس نمایش اعداد گنگ روی محور اعداد است به طوری که وتر مثلث قائم الزاویه متناظر با عدد گنگ را به کمک پرگار روی محور مشخص می کنیم.



در شکل $\overset{\Delta}{AMC}$ طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \Rightarrow 2^2 = AM^2 + 1^2 \Rightarrow AM = \sqrt{3}$$

طول ضلع مربع محاط شده را برابر a در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$PQ = a \ , \ CQ = 1 - \frac{a}{2}$$

از طرفی چون $PQ \parallel AM$، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{CQ}{MC} = \frac{PQ}{AM} \Rightarrow \frac{1 - \frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{3}\left(1 - \frac{a}{2}\right)$$
$$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 6$$

شکل ۴. حل سوال ۶ ترکیبی از قضایای بنیادی فیثاغورس و تالس

جدول ۱. درصد پاسخگویی دانش آموزان به سوالات آزمون

سوالات و فراوانی پاسخگویی	۰ اشتباه / بی پاسخ	۰.۲۵ جزئی از حل	۰.۵ نیمی از مسیر حل	۰.۷۵ حل تقریبا درست	۱ حل کامل
سوال ۱					۱۰
سوال ۲	۳		۱		۶
سوال ۳			۲	۱	۷
سوال ۴					۱۰
سوال ۵					۱۰
سوال ۶	۲	۲			۶
سوال ۷			۲		۸

با بررسی موقعیت های آموزشی و پاسخ سوالات دانش آموزان در می یابیم که تقریبا ۳۰ درصد دانش آموزان در بررسی ابعاد کاربردی قضیه فیثاغورس مشکل دارند. اکثر دانش آموزان قضایا را حفظ کرده بودند و کاربرد آنها را به درستی نمی دانستند.

انتخاب راه حل جدید

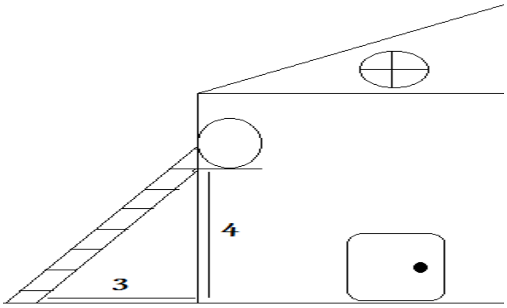
راه حل جدید الگوی تدریس 5E است، که در منابع فارسی بیشتر به الگوی «ساختن گرایی» شناخته می شود، در حقیقت یکی از الگو ها و روش های تدریس مبتنی بر دیدگاه ساخت گرایی است و مدل ها و روش های تدریس دیگری مانند «یادگیری مبتنی بر مسئله»، «یادگیری مبتنی بر کاوشگری» و «یادگیری مشارکتی» نیز بر اساس این دیدگاه به وجود آمده اند. الگوی تدریس 5E شامل پنج مرحله «درگیر کردن۱[1]»، «کاوش کردن[2]»، «توضیح دادن[3]»، »شرح و بسط دادن[4]» و «ارزیابی کردن[5]» است.

اجرای راه حل و نظارت بر آن

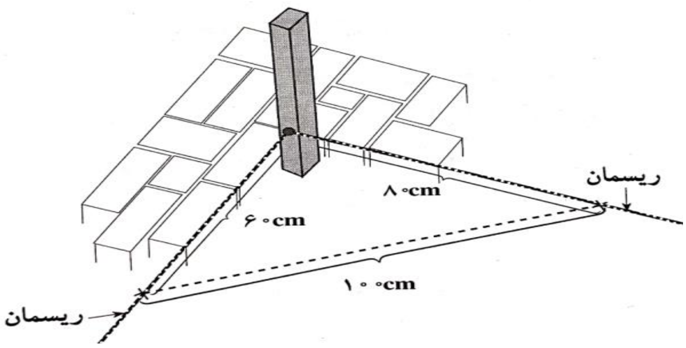
مرحله ۱. درگیر کردن: عبارت است از فعالیتی که دانش آموزان در طی انجام آن به نکته یا نکات جدید می رسند و آن ها را کشف می کنند. و این شروع می تواند به صورت: طرح پرسش از سوی معلم، ارائه مسئله، استفاده از مدیا (صوت، تصویر، انیمیشن) و ... به منظور جذب دانش آموزان باشد و ذهن آنها را درگیر کار، هدف، موقعیت و مسئله کند.

[1] Engaging
[2] Exploration
[3] Explanation
[4] Elaboration
[5] Evaluation

شما بیرون از خانه هستید و در قفل شده است و تنها پنجره ی باز در ۴ متری بالاتر از سطح زمین است. شما باید از یکی از همسایگان خود یک نردبان قرض بگیرید و یک بوته در امتداد لبه خانه وجود دارد، بنابراین شما باید نردبان را در ۳ متری خانه قرار دهید. برای رسیدن به پنجره به چه طولی از نردبان نیاز دارید؟ (قضیه فیثاغورس)

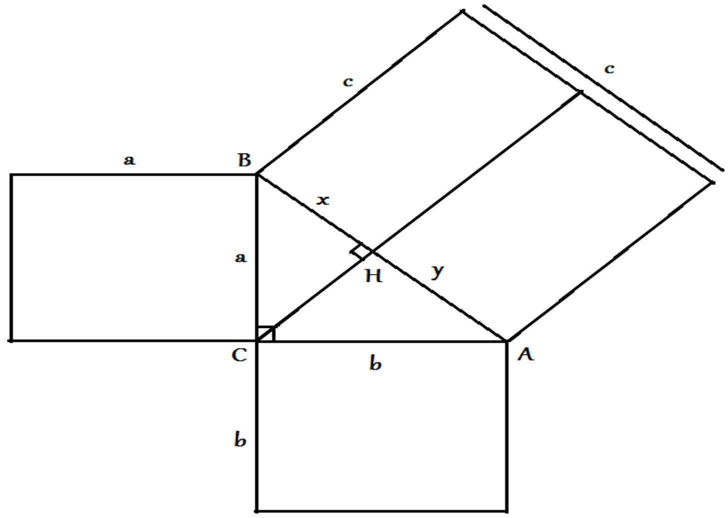


یکی از موارد مهم در ساختن خانه ها و ساختمان قائمه بودن زاویه بین دیوارها و یا گوشه اتاق ها و اسکلت بندی ساختمان است، معمولا بنا ها و معماران برای قائمه شدن زاویه بین دیوارها که به آن گونیا کردن می گویند، از روش بسیار ساده و جالبی استفاده می کنند. به این صورت که پس از چیدن اولین ردیف گوشه بین دو دیوار، رو لبه اولین ردیف و در امتداد دیوارها ریسمان کشی می کنند. و سپس به وسیله متر روی یک ریسمان، ۸۰ سانتی متر و روی ریسمان دیگر به اندازه ۶۰ سانتی متر از گوشه دو دیوار جدا کرده و علامت گذاری می کنند. سپس آنقدر دو سر دیگر ریسمان را تغییر میدهند تا فاصله بین دو محل علامت گذاری شده دقیقا به اندازه ۱۰۰ سانتی متر شود. در این وضعیت طرف دیگر ریسمان ها را ثابت کرده و شروع به آجر چینی، در امتداد ریسمان ها می کنند. پس از چند ردیف دیوار چینی، قائمه بودن زاویه بین دو دیوار کاملا مشهود خواهد بود. آیا این روش مبنای ریاضی دارد؟ (عکس قضیه فیثاغورس)



مرحله ۲. کاوش: در مرحله کاوش دانش آموزان در مورد فعالیت مشخص شده به تفکر آزاد می پردازند و می توانند مفهوم یا مهارت را با تجربه، مشاهده، تحقیق، تفسیر و نتیجه گیری کشف کنند. نقش معلم نه تنها شروع فعالیت، طراحی فرایند، شرح پیشینه مناسب، تامین منابع لازم و مقابله با بدفهمی هاست، بلکه با گوش دادن، مشاهده، راهنمایی دانش آموزان و مدیریت بحث شرایط را برای آنان آسان می کند. برای این مرحله می توان فعالیتی بصورت زیر که برگرفته از اثبات قضیه فیثاغورس در کتاب اصول اقلیدس است، طراحی کرد و فرصتی برای یادگیری مشارکتی در اختیار دانش آموزان قرار داد.

فعالیت : مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید . روی اضلاع آن مربع هایی به طول همان ضلع بسازید، ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه را به گونه ای رسم کنید که مربع روی وتر را نیز به دو مستطیل تقسیم کند .



الف) تشابه مثلث های ABC و BHC را بررسی کنید و نسبت تشابه اضلاع آنها را بنویسید.

ب) تشابه مثلث های ABC و AHC را بررسی کنید و نسبت تشابه اضلاع آنها را بنویسید.

ج) آیا می توان نتیجه گرفت؛ در هر مثلث قائم الزاویه مجموع مساحت های مربع هایی که روی اضلاع ساخته می شود با مساحت مربعی که روی وتر ساخته می شود برابر است؟

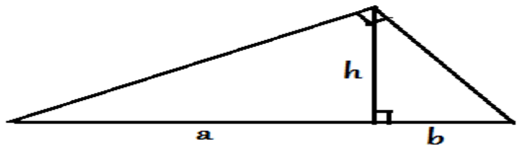
د) در مورد رابطه بین اضلاع مثلث قائم الزاویه چه نتیجه ای می گیرید؟

مرحله ۳. توضیح دادن: در این مرحله دانش آموزان همه آنچه را که از مراحل جذب و کاوش دریافته اند، توضیح می دهند. این مرحله به آنان فرصت می دهد آنچه را یادگرفته اند به کار گیرند و بکوشند بین تجربه های خود و توضیحات ارتباط برقرار کنند و توصیفی دقیق و منطقی داشته باشند. معلم بعد از کنترل و هدایت بحث، توضیحات فنی، علمی و صریحی درباره مفاهیم و مهارت ها ارائه می کند. در پایان این مرحله باید دانش آموزان بدانند که مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است اگر و تنها اگر آن مثلث قائم الزاویه باشد.

مرحله ۴. بسط و گسترش دادن: این مرحله فرصت هایی را برای دانش آموزان فراهم می کند تا از طریق کسب تجربه های جدید، اطلاعات و توانایی های کسب شده در مراحل قبلی را گسترش دهند و در موقعیت های جدید و حوزه های دیگر به کار گیرند تا درک عمیق و غنی تری از مفاهیم و مهارت ها را در خود به وجود آورند. مسئله جامع تر سبب جست و جو اطلاعات و بسط مفاهیم می شود. برای قضیه فیثاغورس به عنوان یک قضیه بنیادی از هندسه مسطحه می توان تعمیم هایی چون قضیه کسینوس ها در مثلثات، قضیه هرون، قضیه آپولونیوس، قضیه استوارت، قضیه کارنو، نمایش اعداد گنگ (پیچ ارشمیدس) و قضیه فیثاغورس در حالت فضایی (قضیه فولگابر) و ... را در نظر گرفت.

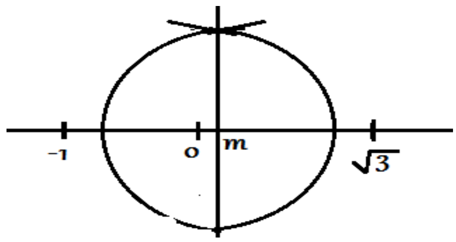
با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم الزاویه **روشی برای نمایش $\sqrt{\sqrt{3}}$** ارائه دهید .

می دانیم در مثلث قائم الزاویه ، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم ، وتر را به دو قسمت تقسیم می کند که مجذور ارتفاع وارد بر وتر برابر حاصل ضرب طول های آن دو قسمت است به عبارتی ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده بر وتر است .

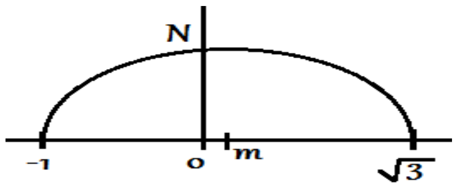


$$h^2 = ab \longrightarrow h = \sqrt{ab}$$

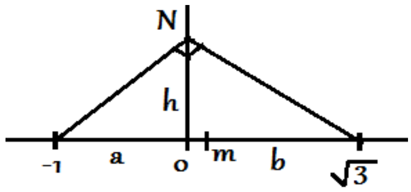
ابتدا نقاط $\sqrt{3}$ و ۱- را روی محور مختصات ، سپس نقطه وسط این دو نقطه یعنی m را به روش یافتن عمود منصف مشخص می کنیم ؛



سپس خطی عمود بر محور که از مبدا می گذرد رسم می کنیم، آن گاه به مرکز m و شعاعی به طول فاصله m تا $\sqrt{3}$ یعنی $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ کمان می زنیم، محل برخورد این کمان با خطی که عمود بر مبدا رسم کرده بودیم را N می نامیم.



فاصله مبدا تا N همان $\sqrt{\sqrt{3}}$ است، زیرا:



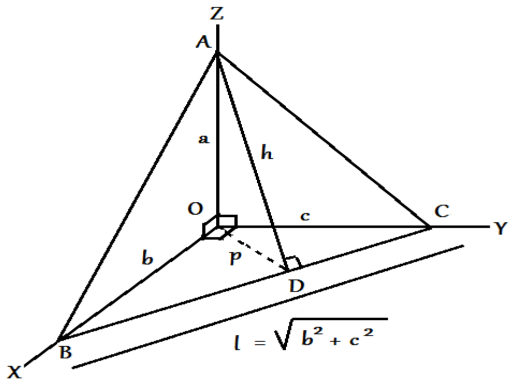
$$h^۲ = ab = ۱ \times \sqrt{۳} \Rightarrow h = \sqrt{\sqrt{۳}}$$

حال کافی است دهانه پرگار را به اندازه $\sqrt{\sqrt{3}}$ باز کنیم و با مرکز مبدا کمانی بزنیم.

در ادامه حتی می توان تحقیق یا پروژه هایی برای دانش آموزان در قالب فعالیت های انفرادی یا گروهی طراحی کرد:

قضیه فیثاغورس در حالت فضایی (قضیه فولگابر) : چهار وجهی قائم الزاویه OABC که هر یک از ضلع های OA و OB و OC دو به دو در نقطه O بر هم عمودند را در نظر می گیریم، سپس می توانیم بگوییم که مربع مساحت سطح روبه رو به راس O برابر مربع مساحت وجه های دیگر است. پروفسور لیتمان معتقد است که این شباهت یعنی یافتن معادل فضایی قضیه فیثاغورس را برای نخستین بار یوهان فولگابر اهل اولم آلمان در سال ۱۶۲۲ پیدا کرده است (دارکو ولجین، ۲۰۰۰).

$$S^{۲}\underset{ABC}{\Delta} = S^{۲}\underset{AOB}{\Delta} + S^{۲}\underset{AOC}{\Delta} + S^{۲}\underset{BOC}{\Delta}$$



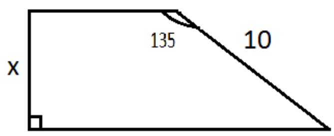
مرحله ۵. ارزشیابی: در روش تدریس ساخت گرایی، ارزشیابی مستمر (ارزشیابی تکوینی) در طول فرایند و انجام فعالیت ها همواره نقش مهمی دارد، با این وجود ارزشیابی پایانی نیز به قوت خود باقی است. منظور از ارزشیابی پایانی انتخاب صحیح چند تمرین (به منظور تثبیت و تکرار) و مسئله (به منظور بررسی موقعیت جدید) برای بررسی میزان یادگیری دانش آموزان است.

گردآوری اطلاعات شواهد ۲

برای بررسی تدریس جدید و تاثیر اقدامات انجام شده بر توانایی عملکرد دانش آموزان ، آزمون زیر مشابه سبک سوالات قبلی طراحی شد :

---

۱. در ذوزنقه قائم الزاویه زیر طول x را بدست آورید .

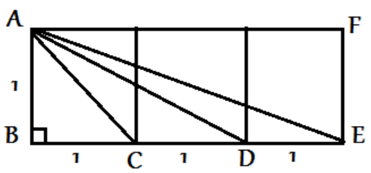


۲. ارتفاع مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a را بدست آورید .

۳. رابطه $sin^{۲}\theta + cos^{۲}\theta = ۱$ را به کمک قضیه فیثاغورس اثبات کنید .

۴. با استفاده از پیچ ارشمیدسی $\sqrt{۷}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید .

۵. در مستطیل ABEF ، سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند . ثابت کنید مثلث های ACD و ACE متشابه اند .

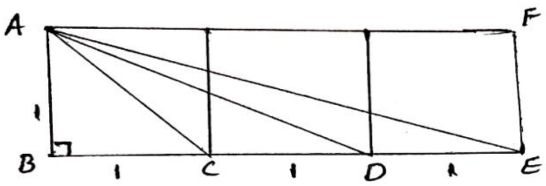


ارزشیابی تاثیر اقدام جدید

جدول ۲. درصد پاسخگویی دانش آموزان به سوالات آزمون بعد از تدریس

سوالات و فراوانی پاسخگویی	۰ اشتباه / بی پاسخ	۰.۲۵ جزئی از حل	۰.۵ نیمی از مسیر حل	۰.۷۵ حل تقریبا درست	۱ حل کامل
سوال ۱					۱۰
سوال ۲					۱۰
سوال ۳					۱۰
سوال ۴					۱۰
سوال ۵	۱		۱		۸

بعد از اجرای راه حل انتخابی و نقد و بررسی سئوالات آزمون به همراه ابعاد و لایه های دیگر آن، به نظر می رسد دانش آموزان دید جامع تری نسبت به مفهوم و تعمیم های قضیه فیثاغورس پیدا کردند. تدریس تکمیلی با استفاده از دیدگاه ساخت گرایی و به کارگیری الگوی تدریس 5E با بررسی مثال های دنیای واقعی در مرحله درگیری و پیاده کردن قضیه فیثاغورس در تعمیم های مختلف و ایجاد ارتباط قضایای بنیادی تالس و تشابه منجر به یادگیری عمیق تر و بهبود عملکرد دانش آموزان شد.



با در نظر گرفتن $\hat{B}=90^\circ$ طبق قضیه فیثاغورس داریم :

$$\overset{\triangle}{ABC}: AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$
$$\overset{\triangle}{ABD}: AD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$
$$\overset{\triangle}{ABE}: AE=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

حال دو مثلث $\overset{\triangle}{ACD}$ و $\overset{\triangle}{ACE}$ را در نظر می گیریم :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AE}{AD}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}\\ \frac{CE}{AC}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\\ \frac{AC}{CD}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{CE}{AC}=\frac{AC}{CD}=\sqrt{2} \Rightarrow \overset{\triangle}{ACE} \underset{\text{اضلاع}}{\overset{\text{تشابه}}{\sim}} \overset{\triangle}{ACD}$$

شکل ۵. حل سوال ۵ ترکیبی از قضایای فیثاغورس و تشابه

اعتباریابی و نتیجه گیری

در این مقاله سعی شد با الگوی تدریس 5E؛ که در منابع فارسی بیشتر به الگوی ((ساختن گرایی)) شناخته می شود، در حقیقت یکی از الگو ها و روش های تدریس مبتنی بر دیدگاه ساخت گرایی است و مدل ها و روش های تدریس دیگری مانند ((یادگیری مبتنی بر مسئله))، ((یادگیری مبتنی بر کاوشگری)) و ((یادگیری مشارکتی)) نیز بر اساس این دیدگاه به وجود آمده اند. الگو تدریس 5E شامل پنج مرحله ((درگیر کردن))، ((کاوش کردن))، ((توضیح دادن))، ((شرح و بسط دادن)) و ((ارزیابی کردن)) است. شواهد نشان می دهد که دانش آموزان رابطه فیثاغورس را در مثلث قائم الزاویه به خوبی درک می کنند اما در کاربرد و ساختن آن در موقعیت های تازه مشکل دارند. تجزیه و تحلیل داده های حاصل از مطالعه نشان داد؛ بررسی مثال های دنیای واقعی در مرحله درگیری و پیاده کردن قضیه فیثاغورس در تعمیم های مختلف و ایجاد ارتباط قضایای بنیادی تالس و تشابه منجر به یادگیری عمیق تر و بهبود عملکرد دانش آموزان شد.

منابع

ابوطالبی، م (۱۳۷۵). چشم اندازی از هشتمین کنگره جهانی آموزش ریاضی اسپانیا، رشد آموزش ریاضی، شماره ۴۷، صفحه ۲۸.

جف براون، پیتر. ترجمه؛ طبیعی، حسن (۱۳۹۵). میراث قضیه فیثاغورس، مجله برهان ریاضی متوسطه دوم، شماره ۸ ، صفحات ۵ — ۳.

راجر ب . نلسن. (۱۳۷۵). اثبات بدون کلام. ترجمه؛ چمن آرا، سپیده، موسسه انتشارات فاطمی.

سلیمی، د (۱۳۸۹). مبانی پایه نظریه ساختن گرایی، رشد تکنولوژی آموزشی، شماره ۱۵، صفحات ۸ — ۱۲.

شه پان — النسکی (۱۳۶۱). کتاب در پی فیثاغورس. ترجمه؛ شهریاری، پرویز.

شهریاری، پرویز (۱۳۹۲). کتاب تاریخ ریاضیات. موسسه فرهنگی مدرسه برهان، انتشارات مدرسه.

قاسمی پویا ، اقبال (۱۳۸۹) . راهنمای معلمان پژوهنده، چاپ پنجم، تهران، پژوهشکده تعلیم و تربیت.

کاشفی، حمیدرضا (۱۴۰۰). الگوی تدریس 7E، مجله رشد آموزش ریاضی، شماره ۱۳۹، صفحات ۱۰ — ۴.

کتاب راهنمای معلم، هندسه ۱۰ ریاضی (۱۳۹۵). سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، دفتر برنامه ریزی و تالیف کتب درسی.

ولجین، دارکو، ترجمه ؛ برادران، سهیل (۱۳۸۳). قضیه دو هزار و پانصد ساله فیثاغورس، دانش و مردم ، شماره ۵ .

هاورد. ایوز، ترجمه؛ وحیدی اصل، محمد قاسم (۱۳۷۹). کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول، مرکز نشر دانشگاهی تهران.

هندسه ۱، سال دوم آموزش متوسطه (۱۳۹۴). سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، دفتر برنامه ریزی و تالیف کتب درسی.

AMSI (Australian Mathematical Sciences Institute) Pythagoras’ Theorem, The Improving Mathematics Education in School (TIMES) Project, June ۲۰۱۱.