

کنترل اثر اشبا و میدان مغناطیسی بر رفتار زمانی درهمتنیدگی هایبریدی در یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد برای یک حالت اولیه غیر درهمتنیده

فاطمه امیری^۱

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۱۸

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۶

چکیده

در این مقاله، ساز و کار (رفتار زمانی) درهمتنیدگی بین درجات آزادی الکترون (درهمتنیدگی هایبریدی) در یک نقطه کوانتومی دو بعدی ناهمسانگرد برای یک حالت اولیه غیر درهمتنیده مورد بررسی قرار گرفته است. با محاسبه تحول زمانی آنژیوپی فون نیومن به عنوان سنجه ی درهمتنیدگی بین اسپین و مجموع نوسانگرها نشان داده شده است که درهمتنیدگی هایبرید دچار پدیده فروهش و نمو می شود و خصوصیات آن به پارامترهای قابل کنترل، نظیر پارامتر اشبا و میدان مغناطیسی قویاً وابسته است. همانطور که خواهیم دید با افزایش میدان مغناطیسی، میزان درهمتنیدگی کاهش یافته، در حالی که با افزایش ثابت اشبا این کمیت افزایش می یابد. این نتایج روش های جدیدی برای کنترل میزان درهمتنیدگی میان درجات آزادی الکترون، که نیاز اساسی پردازش اطلاعات کوانتومی است، پیش روی ما قرار می دهد.

کلید واژه ها: نقطه کوانتومی، درهمتنیدگی هایبریدی، اثر اشبا، میدان مغناطیسی.

^۱استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه فرهنگیان، شیراز، ایران، fatemeh_۶۲@Yahoo.com

۱- مقدمه

نظریه اطلاعات کوانتومی با بهره‌گیری از ویژگی‌هایی صرفاً کوانتومی مانند درهمتیدگی، در مواردی برتری‌هایی بر نظریه اطلاعات کلاسیکی دارد. باحالت‌های درهمتیده می‌توان ظرفیت ذخیره اطلاعات و نیز سرعت پردازش آن را افزایش داد. امروزه کاربردهای زیادی برای حالت‌های درهمتیده پیشنهاد شده است [۳-۱]. در هر یک از کاربردها ویژگی‌های مختلفی از درهمتیدگی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال در فناوری اطلاعات در بعضی مواقع نیاز است که درهمتیدگی حداکثر میزان خود را داشته و در شرایط دیگری لازم است که کاملاً از بین برود (مرگ ناگهانی درهمتیدگی) و یا از یک سیستم به دیگری انتقال یابد [۴]. بدین ترتیب چگونگی تولید و توصیف ویژگی‌های درهمتیدگی به حوزه‌ی وسیعی از پژوهش تبدیل شده است. برای درک روشنی از مفهوم درهمتیدگی نیاز به بررسی و چگونگی تولید و کنترل آن در محیط‌های گوناگون است که برای آن سیستم‌های مختلف حالت جامدی چون نقاط کوانتومی می‌تواند کاندیدای مناسبی باشد. با توجه به استفاده از درهمتیدگی کوانتومی در پردازش اطلاعات می‌توان با بهره‌برداری از نقاط کوانتومی، به طراحی کامپیوترهای کوانتومی دست یافت. هدف ما در این مقاله بررسی زمینه‌هایی است که در ساخت ابزارهای تحلیل اطلاعات، می‌تواند بالقوه مفید واقع شوند. در این ارتباط می‌توان از درهمتیدگی میان سیستم‌های فیزیکی متمایز و یا درهمتیدگی میان درجات آزادی یک سیستم بهره برد. درهمتیدگی بین درجات آزادی مستقل یک‌ذره که امروزه به درهمتیدگی‌هایبرید مشهور است، یک روش جدید برای پردازش اطلاعات و انتقال اطلاعات کوانتومی را فراهم کرده است [۷-۵]. در این راستا حالت‌های درهمتیده‌هایبرید یکی از موضوعات بسیار مهم در فناوری اطلاعات کوانتومی بشمار آمده و اخیراً هم به‌صورت تئوری و هم تجربی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۴-۸]. تاکنون مدل‌های مختلفی با استفاده از حالت‌های درهمتیده‌هایبرید برای نیل به اهداف فناوری و پردازش اطلاعات کوانتومی ارائه گردیده است. در این ارتباط، مطالعه ویژگی‌ها و خواص درهمتیدگی بین درجات آزادی یک‌ذره (هایبرید) در نانو ساختارهای کوانتومی، کریستال‌هایی در حد نانو از مواد نیم‌رسانا، یکی از گزینه‌های پیش رو به شمار می‌رود.

بدین منظور سیستم مورد بررسی در این مقاله، ترکیبی است از دو ماده متفاوت گالیم آرسناید (*GaAs*) و ایندیم گالیم آرسناید (*InGaAs*) که بر روی هم قرار گرفته‌اند (با فصل مشترک تخت)، است [۱۵]. در فصل مشترک این نانو ساختار، الکترونهاى رسانش یک گاز الکترونی دوبعدی را تشکیل می‌دهند [۱۶، ۱۵]. با محدود کردن این گاز در هر دو بعد (در اینجا x و y) یک نقطه کوانتومی دوبعدی خواهیم داشت (که در راستای z توسط ساختار ناهمگن محدود شده است) به خاطر گافهای انرژی متفاوت این دو ماده، یک پتانسیل عمیق نا متقارن در راستای عمود بر فصل مشترک تشکیل می‌شود. عدم تقارن پتانسیل فصل مشترک، منجر به اثر وابسته به اسپین، به نام بر هم کنش اسپین - مدار راشبا، می‌شود [۱۹-۱۷]. این اثر به دلیل عدم وجود خاصیت تقارن معکوس ایجاد می‌شود از آنجا که اثر راشبا را می‌توان توسط صفحات پتانسیل خارجی کنترل کرد، این اثر یک مکانیسم برای کنترل حالت‌های الکترونی را تشکیل می‌دهد. در چنین نانو ساختارهایی الکترونهاى رسانش یک گاز الکترونی دوبعدی را در فصل مشترک تخت تشکیل می‌دهند. به علاوه تفاوت مواد در سامانه، همراه با میدانهای الکتریکی خارجی به کار رفته، آزادی حرکت الکترون را کاهش می‌دهد و آن را در یک نقطه کوانتومی دوبعدی محدود می‌کند. این محدودیت می‌تواند در هر دو راستای یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد دوبعدی با فرکانس‌های متفاوت، سهمی شکل باشد [۲۰]. به علت تقارن تخت برگشت زمان، حالت اسپینی الکترون در این سیستم دارای تبهگنی کرامرز است که با اعمال یک میدان مغناطیسی یکنواخت و عمود بر صفحه نقطه کوانتومی در راستای محور z ، رفع می‌شود [۲۱]. بنابراین در ادامه، یک الکترون محدود شده در یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد دوبعدی، با محدودیت سهمی شکل و در یک میدان مغناطیسی یکنواخت را در نظر می‌گیریم.

در این مقاله درهمتیدگی بین درجات آزادی الکترون‌ها، درهمتیدگی‌هایبریدی، در یک نانو نقطه‌ی دوبعدی و ناهمسانگرد تحت تأثیر میدان مغناطیسی و اثر راشبا مورد بررسی، قرار می‌دهیم. خاطر نشان می‌کنیم که این درهمتیدگی بین درجات آزادی فضایی و اسپینی الکترون صورت می‌گیرد. برای این منظور ابتدا هامیلتونی تبدیل یافته‌ی الکترون در نقطه

کوانتومی دوبعدی ناهمسانگرد در یک میدان مغناطیسی یکنواخت همراه با اثر راشبا معرفی می‌نماییم. و با معرفی یک عملگر کازیمیر^۱ که ویژه مقادیر آن برانگیختگی‌های سیستم را نشان می‌دهد، به محاسبه درهمتنیدگی حالت‌های الکترون می‌پردازیم.

۲- هامیلتونی سیستم

هامیلتونی سیستم الکترونیهای محدود شده توسط پتانسیل سهموی ناهمسانگرد تحت اثر یک میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی و عمود بر سطح آن، همراه با برهم کنش اثر اسپین-مدار راشبا به صورت زیر بیان می‌شود [۲۱].

$$H = \frac{(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m^*} + V_c(x, y) - \frac{\alpha}{\hbar} [(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}) \times \vec{\sigma}]_z + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma_z, \quad (1)$$

اولین جمله در معادله (۱) بیانگر انرژی جنبشی الکترون در حضور میدان مغناطیسی که توسط پتانسیل برداری \vec{A} توصیف می‌شود و $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ تکانه الکترون، m^* (که در $InGaAs$ ، $m^* = 0.05m_e$ است) جرم مؤثر الکترون، دومین جمله $V_c(x, y) = \frac{1}{2} m_e^* (\omega_{0x}^2 x^2 + \omega_{0y}^2 y^2)$ ، پتانسیل محدودیت است. α بیانگر پارامتر راشبا برای برهم کنش اسپین-مدار و آخرین جمله بیانگر اثر زیمان است که در آن $\vec{\sigma}$ ماتریس‌های پائولی، μ_B مگنتون بوهر ($\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$) است. و در آن g بیانگر، فاکتور لاندائو مربوط به الکترون (که در $InGaAs$ ، $g = -4$ است) می‌باشد، با انتخاب پیمانه متقارن برای پتانسیل برداری $\vec{A} = \frac{B}{2} (-y, x, 0)$ ، و جایگذاری $V_c(x, y)$ در معادله (۱) آنرا می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۲)

$$H = \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \Omega_x^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \Omega_y^2 y^2 + \frac{\omega_c}{2} (xp_y - yp_x) - \frac{\alpha}{\hbar} [(p_x - \frac{eB}{2c}y)\sigma_y - (p_y - \frac{eB}{2c}x)\sigma_x] + \frac{\hbar\omega_c}{4} \frac{m}{m_0} g \sigma_z$$

که در آن $\omega_c = \frac{eB}{m_e^* c}$ فرکانس سیکلوترونی، $\Omega_{x(y)} = \sqrt{\omega_{0x(y)}^2 + \frac{\omega_c^2}{4}}$ عملگرهای خلق و نابودی یک

نوسانگر هماهنگ ساده دوبعدی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_{x(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m_e^* \Omega_{x(y)}}{\hbar}} x(y) + \sqrt{\frac{1}{\hbar m_e^* \Omega_{x(y)}}} P_{x(y)} \right), \quad (3)$$

$$a_{x(y)}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m_e^* \Omega_{x(y)}}{\hbar}} x(y) - i \sqrt{\frac{1}{\hbar m_e^* \Omega_{x(y)}}} P_{x(y)} \right)$$

عملگرهای خلق و نابودی طوری تعریف شده‌اند که رابطه جابجایی زیر برقرار می‌سازند،

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad i, j = x, y \quad (4)$$

اگر عملگرهای مکان و تکانه، در هر بعد را، برحسب عملگرهای خلق و نابودی نوسانگر نوشته شده و رابطه جابجایی (۴)

بکار رود، هامیلتونی به صورت زیر در خواهد آمد:

^۱ Casimir operator

(۵)

$$H = \hbar\Omega_x (a_x^\dagger a_x + \frac{1}{2}) + \hbar\Omega_y (a_y^\dagger a_y + \frac{1}{2}) + i \frac{\omega_c}{4} \left(\frac{\Omega_x + \Omega_y}{\Omega_x \Omega_y} \right) (a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y) \\ + \hbar\omega_x (a_x \sigma_+ + a_x^\dagger \sigma_-) + i \hbar\omega_y (-a_y \sigma_+ + a_y^\dagger \sigma_-) + \frac{\hbar\omega_c}{4} \frac{m}{m_0} g \sigma_z$$

که در آن $\omega_{x(y)} = \frac{\alpha}{\hbar^2} \left(\frac{\sqrt{2m\hbar\Omega_{x(y)}}}{2} + \frac{eB}{4c} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\Omega_{x(y)}}} \right)$ و عملگرهای نردبانی اسپین را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm i \sigma_y) \quad (6)$$

که در معادله (۵) دو جمله اول بیانگر انرژی یک نوسانگر ناهمسانگرد دوبعدی با فرکانسهای Ω_x و Ω_y می‌باشد. جمله سوم توصیف کننده برهم کنش دو نوسانگر که ناشی از انتخاب پیمانه متقارن در جمله $\vec{A} \cdot \vec{P}$ هامیلتونی است. جملات چهارم و پنجم برهم کنش اسپین با نوسانگر، ناشی از برهمکنش اسپین-مدار راشبا. جمله آخر برهم کنش اسپین و میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد که همان اثر زیمان است. با استفاده از یک تبدیل یکانی هامیلتونی را برحسب نوسانگرهای جدیدی به دست آورده که فرم ساده‌تری به خود می‌گیرد. در نهایت هامیلتونی تبدیل یافته را برای محاسبه رفتار زمانی در همتیدگی هایبریدی بین حالت‌های الکترون در چنین ساختاری مورد استفاده قرار خواهیم داد.

بنابراین با اعمال تبدیل یکانی

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ i \sin \theta & -i \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad (7)$$

که در آن $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_x}{\omega_y}$ بر روی هامیلتونی (۵) خواهیم داشت:

$$\tilde{H} = \hbar \left[\sum_{k=x,y} \tilde{\Omega}_k b_k^\dagger b_k + \frac{\omega_c m^*}{4m_0} g \sigma_z + \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} (b_x^\dagger \sigma_- + b_x \sigma_+) \right] \quad (8)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در این نمایش، تبادل انرژی بین نوسانگرها و اسپین-نوسانگر در جهت y وجود ندارد.

اثرات این دو نوع برهم کنش به ترتیب در فرکانس‌های نوسانی جدید

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_x &= \Omega_x \cos^2 \theta + \Omega_y \sin^2 \theta + \lambda \sin 2\theta \\ \tilde{\Omega}_y &= \Omega_x \sin^2 \theta + \Omega_y \cos^2 \theta - \lambda \sin 2\theta \end{aligned} \quad (9)$$

با $\lambda = \frac{\omega_c}{4} \left(\frac{\Omega_x + \Omega_y}{\Omega_x \Omega_y} \right)$ و قدرت جفت شدگی نوسانگر نوع x و اسپین ظاهر می‌شوند. عملگر تعداد برانگیختگی

کل، $N = a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + \sigma_+ \sigma_-$ با ویژه مقدار n تحت تبدیلات یکانی با $\lambda = \frac{\omega_c}{4} \left(\frac{\Omega_x + \Omega_y}{\Omega_x \Omega_y} \right)$ و قدرت

جفتیدگی نوسانگر نوع x و اسپین ظاهر می‌شوند. عملگر تعداد برانگیختگی کل، $N = a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + \sigma_+ \sigma_-$ با ویژه مقدار n تحت تبدیلات یکانی ناورد است و با هامیلتونی کل معادله (۵) جابجا می‌شود و بنابراین عملگر کازیمیر سیستم است. در نتیجه نمایش هامیلتونی کل در پایه‌های N قطعه‌ای - قطری است با بعد $2n + 1$ برای هر قطعه. اما به راحتی می‌توان نشان داد هامیلتونی تبدیل یافته، معادله (۸) با هر دو عملگر $\tilde{N}_y = b_y^\dagger b_y$ و $\tilde{N}_x = b_x^\dagger b_x + b_y^\dagger b_y + \sigma_+ \sigma_-$ جابجا می‌شود

و هر دو ثابت حرکت هستند. در این صورت هامیلتونی تبدیل یافته معادله (۸) برای هر قطعه شامل یک زیر قطعه 1×1 و n تا زیر قطعه 2×2 می باشد.

از آنجایی که هامیلتونی سیستم مذکور شامل درجه اسپینی، $|s\rangle$ ، و فضایی $|\tilde{n}_x, \tilde{n}_y\rangle$ می باشد، این هامیلتونی را در فضای هیلبرت $|\tilde{n}_x, \tilde{n}_y\rangle \otimes |\pm\rangle$ بررسی می نماییم. نمایش هامیلتونی (۸) در نماد دیراک را با استفاده از عملگر واحد به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\tilde{H} = \sum_{\tilde{n}_y} \hbar (\tilde{\Omega}_y \tilde{n}_y - \frac{\omega_0}{2}) |0, \tilde{n}_y, -\rangle \langle 0, \tilde{n}_y, -| + \sum_{\tilde{n}_x, \tilde{n}_y} H(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y) \quad (10)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y) = & \hbar [\tilde{\Omega}_x \tilde{n}_x + \tilde{\Omega}_y \tilde{n}_y + \omega_0] |\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +\rangle \langle \tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +| \\ & + \hbar [\tilde{\Omega}_x (\tilde{n}_x + 1) + \tilde{\Omega}_y \tilde{n}_y + \omega_0] |\tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -\rangle \langle \tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -| \\ & + \hbar \sqrt{(\omega_x^2 + \omega_y^2)(\tilde{n}_x + 1)} [|\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +\rangle \langle \tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -| \\ & + |\tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -\rangle \langle \tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +|] \end{aligned} \quad (11)$$

همان طور که از معادله (۱۰) می بینیم، جمله اول قطعه های 1×1 و جمله دوم قطعه های 2×2 را می دهد. ویژه مقدار و ویژه حالت قطعات 1×1 به صورت زیر می باشد:

$${}^{(12)} \tilde{E}(0, \tilde{n}_y) = \hbar (\tilde{\Omega}_y \tilde{n}_y - \frac{\omega_0}{2})$$

و

$${}^{(13)} |\psi(0, \tilde{n}_y)\rangle = |0, \tilde{n}_y, -\rangle$$

ویژه مقادیر هر قطعه 2×2 در حالی که با قطری کردن قطعات

$${}^{(14)} \begin{aligned} |\tilde{\psi}_1(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)\rangle &= \alpha_1 |\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +\rangle + \alpha_2 |\tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -\rangle \\ |\tilde{\psi}_2(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)\rangle &= \alpha_2 |\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +\rangle - \alpha_1 |\tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -\rangle \end{aligned}$$

با ویژه مقادیر

$${}^{(15)} \tilde{E}_{1,2}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y) = \hbar [\tilde{\Omega}_x (\tilde{n}_x + \frac{1}{2}) + \tilde{\Omega}_y \tilde{n}_y \pm \frac{1}{2} R(\tilde{n}_x)]$$

به دست می آیند که در آن ها

$${}^{(16)} \alpha_1 = \frac{2\sqrt{(\omega_x^2 + \omega_y^2)(\tilde{n}_x + 1)}}{\sqrt{(\tilde{\Omega}_x - \frac{\omega_c m^*}{4m_0} g + R(\tilde{n}_x))^2 + (\omega_x^2 + \omega_y^2)(\tilde{n}_x + 1)}}$$

$$|\alpha_2| = \sqrt{1 - |\alpha_1|^2}, \quad \text{که از بهنجارش آنها داریم}$$

$$R(\tilde{n}_x) = \sqrt{(\tilde{\Omega}_x - \frac{\omega_c m^*}{4m_0} g)^2 + (\omega_x^2 + \omega_y^2)(\tilde{n}_x + 1)} \quad (17)$$

که در بخش بعدی از معادلات (۱۲) تا (۱۷) برای محاسبه عملگر تحول زمانی تبدیل یافته استفاده می شود.

۳- عملگر یکانی تحول زمانی تبدیل یافته

فرض نماییم حالت اولیه سیستم فیزیکی مورد بررسی در لحظه t_0 با $|\alpha, t_0\rangle$ نمایش داده شود. به طور کلی نمی توان انتظار داشت که در لحظات بعد نیز سیستم در همان حالت باقی بماند، بلکه تحول زمانی سیستم حالت آن را دگرگون نموده و به حالت $|\alpha, t\rangle$ تبدیل می نماید. این دو حالت به وسیله یک عملگر یکانی به نام عملگر تحول زمانی $U(t, t_0)$ به صورت زیر به یکدیگر مربوط می گردند:

$$|\alpha, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle \quad (18)$$

یکانی بودن این عملگر به عنوان مهم ترین خصوصیت آن، پایداری احتمال را با گذشت زمان تضمین می نماید جهت دستیابی به عملگر تحول زمانی می بایست از معادله شرودینگر بهره بریم. این عملگر در این معادله صدق می کند (۱۹).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H U(t, t_0)$$

اگر هامیلتونی سیستم مستقل از زمان باشد، نمونه‌ی مورد بررسی در این مقاله، پاسخ معادله‌ی (۱۹) به صورت زیر خواهد بود

$$U(t, t_0) = \exp[-iH(t-t_0)/\hbar] \quad (20)$$

برای محاسبه عملگر تحول زمانی در معادله (۲۰)، از نمایشی که در آن هامیلتونی قطری است، استفاده می شود. در این نمایش، ماتریس تحول زمانی به صورت زیر می باشد

$$U_{diagonalized}(t) = \sum_{\tilde{n}_y} e^{-i\tilde{E}(0, \tilde{n}_y)t/\hbar} |0, \tilde{n}_y, -\rangle \langle 0, \tilde{n}_y, -| \\ + \sum_{\tilde{n}_x, \tilde{n}_y} [e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar} |\tilde{\psi}_1(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)\rangle \langle \tilde{\psi}_1(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)| \\ + e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar} |\tilde{\psi}_2(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)\rangle \langle \tilde{\psi}_2(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)|] \quad (21)$$

جهت بررسی سیستم در فضای اصلی $|\pm\rangle \otimes |\tilde{n}_x, \tilde{n}_y\rangle$ می بایست فرم عملگر تحول زمانی را در این فضا به دست آوریم. این امر با انجام یک تبدیل یکانی امکان پذیر می باشد.

$$\tilde{U}(t) = \tilde{V}_{transformation}^\dagger \tilde{U}_{diagonalized} \tilde{V}_{transformation} \quad (22)$$

در رابطه‌ی بالا $\tilde{V}_{transformation}$ معرف عملگر تبدیل یکانی پایه هاست. بنابراین عملگر تحول زمانی در فضای هیلبرت $|\pm\rangle \otimes |\tilde{n}_x, \tilde{n}_y\rangle$ به صورت زیر حاصل خواهد شد

$$\tilde{U}(t) = \sum_{\tilde{n}_y} \tilde{U}(0, \tilde{n}_y, t) |0, \tilde{n}_y, -\rangle \langle 0, \tilde{n}_y, -| \\ + \sum_{\tilde{n}_x, \tilde{n}_y} [\tilde{U}_{11}(\tilde{n}_y, \tilde{n}_y, t) |\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +\rangle \langle \tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +| \\ + \tilde{U}_{22}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, t) |\tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -\rangle \langle \tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -| \\ + \tilde{U}_{12}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, t) (|\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +\rangle \langle \tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -| + |\tilde{n}_x + 1, \tilde{n}_y, -\rangle \langle \tilde{n}_x, \tilde{n}_y, +|)] \quad (23)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}(0, \tilde{n}_y, t) &= e^{-i\tilde{E}(0, \tilde{n}_y)t/\hbar} \\
 \tilde{U}_{1,1}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, t) &= |\alpha_1|^2 e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar} + |\alpha_2|^2 e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar} \\
 \tilde{U}_{1,2}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, t) &= \tilde{U}_{2,1}^*(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, t) \\
 &= \alpha_1 \alpha_2 (e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar} - e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar}) \\
 \tilde{U}_{2,2}(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, t) &= |\alpha_2|^2 e^{-i\tilde{E}_1(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar} + |\alpha_1|^2 e^{-i\tilde{E}_2(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y)t/\hbar}
 \end{aligned} \tag{24}$$

برای به دست آوردن تحول زمانی سیستم تبدیل یافته، فضای هیلبرت اصلی $|n_x, n_y, \pm\rangle$ را به فضای هیلبرت جدید $|\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \pm\rangle$ می‌بریم. بدین منظور در پایان این بخش، ارتباطی بین حالت‌های نوسانگر در نمایش قدیم و نمایش تبدیل یافته ایجاد می‌کنیم که حالت‌های نوسانگری (در دو بعد) از اثر مکرر عملگر خلق (در دو بعد) روی حالت خلأ به دست می‌آید:

$$|n_x, n_y\rangle = \frac{(a_x^\dagger)^{n_x} (a_y^\dagger)^{n_y}}{\sqrt{n_x!} \sqrt{n_y!}} |0, 0\rangle \tag{25}$$

با استفاده از رابطه اخیر خواهیم داشت

$$|\tilde{n}_x, \tilde{n}_y\rangle = (-i)^{n_y} \sqrt{n_x!} \sqrt{n_y!} \sum_p \sum_{p'} C(n_x, n_y, p, p') \tag{26}$$

$$(\cos \theta)^{n_x - p + p'} (\sin \theta)^{n_y + p - p'} |n_x - p + n_x - p', p + p'\rangle$$

که در آن $C(n_x, n_y, p, p') = \frac{(-1)^{p'} \sqrt{(n_x - p + n_x - p')!} \sqrt{(p + p')!}}{p! p'! (n_x - p)! (n_y - p)!}$ لازم به ذکر است، برای

به دست آوردن رابطه (26) از این حقیقت، $|\tilde{0}, \tilde{0}, \pm\rangle = |0, 0, \pm\rangle$ استفاده شده است

۴- دینامیک عملگر چگالی، برای حالت اولیه غیر درهم تنیده $|0, 1, +\rangle$

از آنجاکه برای به دست آوردن عملگر چگالی در ابتدا باید حالت اولیه مشخص شود. بدین منظور در این بخش، عملگر چگالی وقتی که حالت اولیه سیستم، یک حالت کاملاً غیر درهم‌تنیده با برانگیختگی دو یعنی حالت $|\psi(0)\rangle = |0, 1, +\rangle$ ، بررسی می‌شود. همان‌طور که گفته شد برای به دست آوردن تحول زمانی سیستم تبدیل یافته باید از فضای هیلبرت اصلی به فضای هیلبرت جدید برویم بنابراین

$$|\tilde{\psi}(0)\rangle = i \cos |0, 1, +\rangle - i \sin |1, 0, +\rangle \tag{27}$$

در این وضعیت، حالت تحول یافته سیستم تبدیل یافته، به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{U}(t) |\tilde{\psi}(0)\rangle &= i \cos [\tilde{U}_{11}(0, 1) + \tilde{U}_{12}(0, 1)] |\tilde{0}, \tilde{1}, +\rangle \\
 &\quad - i \sin [\tilde{U}_{11}(1, 0) + \tilde{U}_{12}(1, 0)] |\tilde{1}, \tilde{0}, +\rangle
 \end{aligned} \tag{28}$$

که در آن $\tilde{U}_{11}(0, 1)$ ، $\tilde{U}_{12}(0, 1)$ ، $\tilde{U}_{11}(1, 0)$ و $\tilde{U}_{12}(1, 0)$ در معادله (24) تعریف شده است. بدین ترتیب و با استفاده از معادله (28) عملگر چگالی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید،

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t) = & \left| i \cos[\tilde{U}_{11}(0,1) + \tilde{U}_{12}(0,1)] \right|^2 \left| \tilde{0}, \tilde{1}, + \right\rangle \left\langle \tilde{0}, \tilde{1}, + \right| \\ & + i \cos[\tilde{U}_{11}(0,1) + \tilde{U}_{12}(0,1)] (-i \sin[\tilde{U}_{11}(1,0) + \tilde{U}_{12}(1,0)])^* \left| \tilde{0}, \tilde{1}, + \right\rangle \left\langle \tilde{1}, \tilde{0}, + \right| \\ & + \tilde{U}_{21}(0,0) \tilde{U}_{11}^*(0,0) \left| \tilde{1}, \tilde{0}, + \right\rangle \left\langle \tilde{1}, \tilde{0}, + \right| \\ & - i \sin[\tilde{U}_{11}(1,0) + \tilde{U}_{12}(1,0)] (i \cos[\tilde{U}_{11}(0,1) + \tilde{U}_{12}(0,1)])^* \left| \tilde{1}, \tilde{0}, + \right\rangle \left\langle \tilde{0}, \tilde{1}, + \right| \end{aligned} \quad (29)$$

اکنون با استفاده از عملگر چگالی به دست آمده، به دنبال ماتریس چگالی کاهش یافته نسبت به یکی از زیرسیستم‌ها هستیم. از آنجایی که هدف نهایی به دست آوردن درهمتیدگی است و درهمتیدگی بین دو زیرسیستم تعریف می‌شود (در اینجا درهمتیدگی اسپین-مجموع نوسانگرها) بدین منظور نسبت به حالت‌های اسپینی رد می‌گیریم. بنابراین عملگر $\rho(t)$ را بین حالت‌های برا و کت‌های $\left| +, + \right\rangle$ و $\left| -, - \right\rangle$ قرار می‌دهیم، آنچه به دست می‌آید عملگر چگالی کاهش یافته نام دارد [22] و اندیس R نیز اشاره به این موضوع دارد بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_R(t) = & \left| i \cos[\tilde{U}_{11}(0,1) + \tilde{U}_{12}(0,1)] \right|^2 \left| \tilde{0}, \tilde{1} \right\rangle \left\langle \tilde{0}, \tilde{1} \right| \\ & + i \cos[\tilde{U}_{11}(0,1) + \tilde{U}_{12}(0,1)] (-i \sin[\tilde{U}_{11}(1,0) + \tilde{U}_{12}(1,0)])^* \left| \tilde{0}, \tilde{1} \right\rangle \left\langle \tilde{1}, \tilde{0} \right| \\ & + \tilde{U}_{21}(0,0) \tilde{U}_{11}^*(0,0) \left| \tilde{1}, \tilde{0} \right\rangle \left\langle \tilde{1}, \tilde{0} \right| \\ & - i \sin[\tilde{U}_{11}(1,0) + \tilde{U}_{12}(1,0)] (i \cos[\tilde{U}_{11}(0,1) + \tilde{U}_{12}(0,1)])^* \left| \tilde{1}, \tilde{0} \right\rangle \left\langle \tilde{0}, \tilde{1} \right| \end{aligned} \quad (30)$$

حال در ادامه در بخش بعد، درهمتیدگی هایبرید اسپین-مجموع نوسانگرها محاسبه خواهیم کرد.

۵- درهمتیدگی هایبریدی بین اسپین و زیرویه‌های ساختاری (اجتماع نوسانگرها)

برای سنجش این درهمتیدگی ابتدا روی حالت اسپینی ردگیری جزئی انجام داده (این عمل معادل ردگیری روی حالت نوسانگر است)، ماتریس چگالی کاهش یافته‌ای نتیجه می‌شود معادله (30) با جایگذاری ویژه مقادیر این معادله در آنتروپی فون نویمان، $S(\tilde{\rho}_R(t)) = -\text{tr}[\tilde{\rho}_R(t) \log_2 \tilde{\rho}_R(t)] = -\sum \lambda_i \log_2 \lambda_i$ ، درهمتیدگی بین اسپین و مجموع نوسانگرها به دست می‌آید.

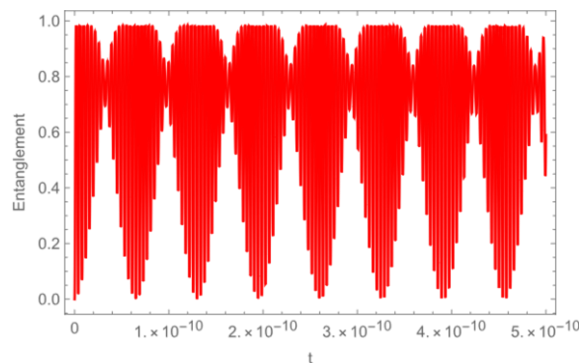
از طرف دیگر، شرط لازم برای آن که زیر فضای اسپینی و زیر فضای نوسانگری درهمتیده باشد آن است که ماتریس چگالی کاهش یافته خود نمایشی از آنسامبل‌های آمیخته باشد. بنابراین مشخصات ماتریس چگالی کاهش یافته را می‌توان شاهدی بر درهمتیدگی دانست.

بر اساس معادلات (15) و (24) مشاهده می‌شود که میدان مغناطیسی خارجی و پارامتر راشبا بر رفتار زمانی درهمتیدگی هایبرید اسپین-نوسانگرها تأثیر بسزایی دارد. رفتار زمانی درهمتیدگی اسپین-نوسانگر و میزان درهمتیدگی که با آنتروپی فون نویمان سنجیده می‌شود، در شکل‌های (1) تا (5) نشان داده شده است. این نمودارها با استفاده از پارامترهای موجود در مرجع [21] برای $InGaAs / GaAs$ رسم شده است. هم‌چنین در مرجع [21]، مقادیر پارامتر راشبا از $1.6 \times 10^{-12} eVm$ (2 تا 3، 0) نشان داده شده است. ابعاد نقطه کوانتومی به صورت

$$L_{0x} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega_{0x}}} \right) = \frac{1}{2} L_{0y} = 10nm$$

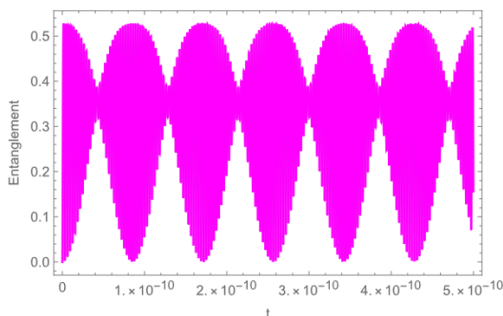
برحسب زمان (از مرتبه دوره‌ی تناوب نوسانگرها) به عنوان مرجع مقایسه انتخاب شده و ستون سمت چپ از پایین به بالا تنها ثابت راشبا افزایش پیدا می‌کند. ستون سمت راست در هر شکل به اثر میدان مغناطیسی اختصاص دارد و از بالا به پایین افزایش می‌یابد.

با یک نگاه اجمالی به شکل‌های (۱) تا (۵)، ویژگی‌های کلی درهم‌تنیدگی اسپین-نوسانگر به شرح زیر حاصل می‌شود: اول آنکه تحول زمانی درهم‌تنیدگی ترکیبی از توابع دوره‌ای زمانی با فرکانسهای مختلف می‌باشد که این، منجر به تشکیل پوشه‌هایی بر نوسانها می‌شود. اطلاعات به صورت تناوبی از حالت‌های اسپینی به حالت‌های نوسانگری انتقال می‌یابد. درهم‌تنیدگی تحت شرایط خاص و قابل کنترل، به مقدار بیشینه یک می‌رسد و به طور دوره‌ای پدیده فروهش و نمو رخ می‌دهد. می‌توان اثرات میدان مغناطیسی و پارامتر راشبا را بر میزان درهم‌تنیدگی، فرکانس و دامنه پدیده فروهش و نمو از این شکلها به وضوح استخراج کرد. از مقایسه نمودارهای سمت راست (۲) و (۴) مشاهده می‌شود که دوره فروهش و نمو، علاوه بر مقدار ماکزیمم، با افزایش میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. از طرف دیگر، مقایسه نمودارهای سمت چپ (۳) و (۵) که در آنها ثابت اسپین-مدار راشبا از پایین به بالا افزایش یافته است، نشان می‌دهد که مقدار ماکزیمم درهم‌تنیدگی با افزایش اثر راشبا افزایش یافته علاوه بر این زمان تناوب پدیده فروهش و نمو افزایش می‌یابد. دلیل فیزیکی برای چنین رفتار زمانی درهم‌تنیدگی اسپین-نوسانگر به شرح زیر است. از ساختار هامیلتونی کل سیستم معادله (۱) به طور روشن دیده می‌شود که پارامتر راشبا و بخشی از میدان مغناطیسی باعث آمیختگی اسپین الکترون و حالت‌های نوسانگری می‌شود که باعث به وجود آمدن درهم‌تنیدگی می‌شود. از طرفی دیگر ویژه مقادیر کل هامیلتونی که در آن فرکانس نوسانات متناسب با قدرت میدان مغناطیسی خارجی است (معادله (۱۰) را ببینید). بنابراین برای میدان مغناطیسی کوچک (طول مغناطیسی بزرگ) فاصله‌ی ترازهای انرژی از یکدیگر کوچک می‌باشد و درحالی که برای میدان‌های بزرگ این فاصله بزرگ می‌شود (همچنین معادله (۱۰) را ببینید). در نتیجه برای میدان‌های مغناطیسی کمتر، جفتیگی اسپین-نوسانگری ضعیف‌تر عمل می‌کند.



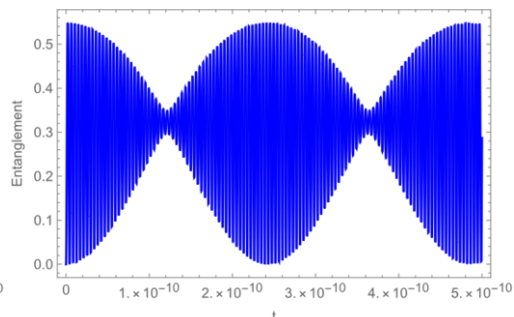
شکل ۱. دینامیک درهم‌تنیدگی به ازای

$$l_B = 6 \times 10^{-8} m \text{ و } \alpha = 2 \times 10^{-12} eVm$$



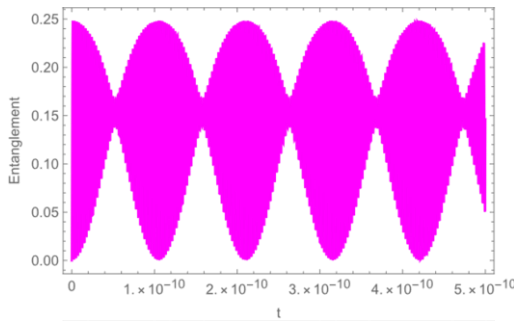
شکل ۳. دینامیک درهم‌تنیدگی به ازای

$$l_B = 6 \times 10^{-8} m \text{ و } \alpha = 1 \times 10^{-12} eVm$$



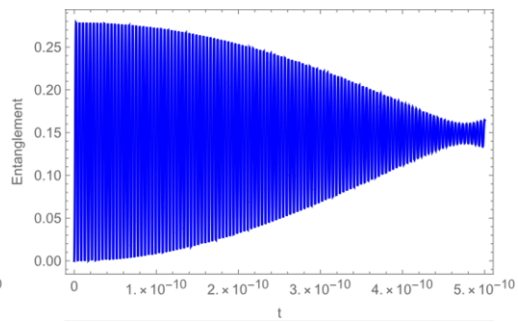
شکل ۲. دینامیک درهم‌تنیدگی به ازای

$$l_B = 7 \times 10^{-9} m \text{ و } \alpha = 2 \times 10^{-12} eVm$$



شکل ۵. دینامیک درهم تنیدگی به ازای

$$l_B = 6 \times 10^{-8} m \text{ و } \alpha = 0.3 \times 10^{-12} eVm$$



شکل ۴. دینامیک درهم تنیدگی به ازای

$$l_B = 2 \times 10^{-9} m \text{ و } \alpha = 2 \times 10^{-12} eVm$$

۶- نتایج

در این مقاله دینامیک درهم تنیدگی هایبریدی بین زیر لایه‌های ساختاری (نوسانگرها) واسپین برای یک الکترون در یک نقطه کوانتومی ناهمسانگرد دویعدی، تحت تأثیر جفت‌شدگی اسپین-مدار راشبا و میدان مغناطیسی خارجی ارائه شده است. درهم تنیدگی هایبریدی بین حالت‌های اسپینی الکترونی و نوسانگرها برای مقادیر متفاوت ثابت راشبا و میدان مغناطیسی محاسبه و رسم شده است. از این محاسبات نتیجه می‌شود که برای درهم تنیدگی نوسانگرها و اسپین الکترون پدیده فروهش و نمو رخ می‌دهد. خصوصیات این پدیده از قبیل دوره تناوب و مقدار بیشینه، به میدان مغناطیسی خارجی و ثابت راشبا قویاً بستگی دارد. بنابراین بدست آوردن هر میزان دلخواهی از درهم تنیدگی با ثابت راشبا و میدان مغناطیسی امکان‌پذیر است

منابع

- [۱] Erhard M, Krenn M, and Zeilinger A (۲۰۲۰). Advances in high-dimensional quantum entanglement. *Nature Rev Phys*, vol ۲, ۳۶۵–۳۸۱.
- [۲] Huber, D. et al. Highly indistinguishable and strongly entangled photons from symmetric GaAs quantum dots. *Nat. Commun.* vol ۸, ۱۵۵۰۶, ۲۰۱۷.
- [۳] Domínguez-Serna F and Rojas F(۲۰۱۹). Spin-orbit hybrid entangled channel for spin state quantum teleportation using genetic algorithms. *Quantum Information Processing*, ۱۸:۳۲.
- [۴] F. Wang, P.-Y. Hou and etc (۲۰۱۸). Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling solid-state spin bath, *Quantum Physics Phys. Rev. B*, vol ۹۸, ۰۶۴۳۰۶.
- [۵] Y. Hasegawa (۲۰۱۲). Entanglement between degrees of freedom in a single-particle system revealed in neutron interferometry *Found. Phys.* vol ۴۲, ۲۹.
- [۶] Huang k, Jeannic H.L and et al (۲۰۱۹). Engineering optical hybrid entanglement between discrete- and continuous-variable states. *New J. Phys.* vol ۲۱, ۰۸۳۰۳۳.
- [۷] Z. Yu , L. Tong and et al (۲۰۲۰). Generation of hybrid Greenberger-Horne-Zeilinger entangled states of particlelike and wavelike optical qubits in circuit QED, *Phys. Rev. A* ۱۰۱, ۰۶۲۳۳۴
- [۸] J. Heo, C.H. Hong adh iand et al (۲۰۱۳). A Quantum Communication Protocol Transferring Unknown Photons Using Path-Polarization Hybrid Entanglement *Chin. Phys. Lett.* vol۳۰, ۰۴۰۳۰۱.
- [۹] Y. Sun, Q.Y. Wen, Z. Yuan (۲۰۱۱). High-efficient quantum key distribution based on hybrid entanglement *Opt. Commun.*vol ۲۸۴, ۵۲۷-۵۳۰.
- [۱۰] F. Yang Zhang and C. Ping Yang (۲۰۲۱). Generation of generalized hybrid entanglement in cavity electro-optic systems. *Quantum Science and Technology*, vol ۶, ۲.
- [۱۱] Y. Hasegawa, R. Loidl and et al(۲۰۰۳). Violation of a Bell-like inequality in single-neutron interferometry, *Nature*. ۴۲۵, ۴۵-۴۸.
- [۱۲] M. Blasone, F. Dell’Anno and et al (۲۰۰۹). Entanglement in neutrino oscillations *Europhys. Lett.* vol۸۵, ۵۰۰۰۲.
- [۱۳] A. Gratsea, M. Lewenstein and A. Dauphin (۲۰۲۰). Generation of hybrid maximally entangled states in a one-dimensional quantum walk. *Quantum Sci. Technol.* vol۵, ۰۲۵۰۰۲.
- [۱۴] S. Adhikari, D. Home and et al (۲۰۱۳). *Device-independent cryptography using intra-particle entanglement*, *Xiv:۱۱۰۱.۰۶۶۰۷۲*.
- [۱۵] L. Wang, A. Rastelli, et al. (۲۰۰۸). Towards deterministically controlled InGaAs/GaAs lateral quantum dot molecules. *New J. Phys.* ۱۰, ۰۴۵۰۱۰ .
- [۱۶] T. Ando, A. B. Fowler and F. Stern (۱۹۸۲). Electronic properties of two-dimensional systems *Rev. Mod. Phy.* ۵۴, ۴۳۷.
- [۱۷] Y.A. Bychkov (۱۹۸۴). Rashba Oscillatory Effects and the Magnetic Susceptibility of Carriers in Inversion Layers *Physica C, Supercond.* vol۱۷, ۶۰۳۹-۶۰۴۵.

[۱۸] J. Nitta, T. Akazaki, et al (۱۹۹۷). Gate Control of Spin-Orbit Interaction in an Inverted InGaAs/InAlAs Heterostructure Phys. Rev. Lett. ۷۸, ۱۳۳۵-۱۳۳۸.

[۱۹] T. Koga, J. Nitta and et al (۲۰۰۲) Rashba Spin-Orbit Coupling Probed by the Weak Antilocalization Analysis in InAlAs/InGaAs/InAlAs Quantum Wells as a Function of Quantum Well Asymmetry Phys. Rev. Lett. ۸۹ ۰۴۶۸۰۱.

[۲۰] S. Ihnatsenka, I.V. Zozpulentko (۲۰۰۶). Spin polarization of edge states and the magnetosubband structure in quantum wires ,Phys. Rev. B ۷۳, ۰۷۵۳۳۱.

[۲۱] S. Debold (۲۰۰۵). *Interaction and confinement in nanostructures: Spin-Orbit coupling and electron-phonon scattering*. Ph. D. Thesis, University of Hamburg .

[۲۲] I. Chuang and M. Nilson (۲۰۰۰). *Quantum computation and Quantum Information*, Cambridge University Press.