

## **The Role of Interpretations of Mathematical Symbols and Formulas**

**Ali Akbar Bahredar\***

Mathematics Teacher, Kerman, Iran

**Abstract:** Misunderstanding is one of the common obstacles in the process of teaching mathematical concepts to students in learning situations. Specialists in mathematics education investigate numerous types of research to identify, reduce and resolve learning misunderstandings. The current study introduces the method of interpretation of mathematical symbols and formulas, its application, and its combined role with other methods in reducing or eliminating misunderstandings of teaching math problems. To do this, first, we define the interpretation of mathematical symbols and then mention examples of the interpretation of mathematical symbols and formulas. Based on the definition of the interpretation of mathematical symbols, we express their positive effects. Then, we chose several important and influential research articles related to school math misunderstandings that investigate as a sample. The results of the studies show that the method of interpreting mathematical symbols and formulas has a practical and effective role in solving misunderstandings and improving the learning of mathematical concepts. The research method is conceptual-inductive and its statistical community includes all the articles related to the challenges, misunderstandings, and misunderstandings related to the teaching of mathematical concepts. The sample considered for analysis and review chose with the priority of journal validity, effectiveness, and availability of the full text of up-to-date articles written by mathematics education researchers. In the end, we introduce suggestions for improving the skills and ability of teachers and students in using the correct interpretations of mathematical formulas to facilitate learning and remove misunderstandings.

**Keywords:** Teaching Method, Misunderstanding, Interpretations of Mathematical, Mathematical Symbol

---

\* Corresponding Author, Email: a.bahredar@gmail.com

## نقش تعابیر نمادها و فرمول‌های ریاضی در یادگیری دانش‌آموزان

علی‌اکبر بهره‌دار\*

دبیر ریاضی آموزش و پرورش، کرمان، ایران

چکیده: بدفهی یکی از موانع رایج در فرایند آموزش مفاهیم ریاضی به دانش‌آموزان در موقعیت‌های یادگیری است. متخصصین حوزه آموزش ریاضی برای شناسایی، کاهش و رفع بدفهی‌های یادگیری پژوهش‌های متعددی انجام دادند. پژوهش حاضر، به معرفی روش تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی، کاربرد و نقش ترکیبی آن با سایر روش‌ها در کاهش یا رفع بدفهی‌های آموزش مسائل ریاضی می‌پردازد. برای این کار، ابتدا تعبیر نمادهای ریاضی را تعریف و سپس مثال‌هایی از تعابیر نمادها و فرمول‌های ریاضی ذکر می‌گردد. بر اساس تعریف تعابیر نمادهای ریاضی، به بیان اثرات مثبت آن پرداخته می‌شود. سپس، چندین مقاله از پژوهش‌های مهم و تاثیرگذار مرتبط به بدفهی‌های ریاضی مدرسه‌ای به عنوان نمونه انتخاب و مورد مطالعه قرار گرفتند. نتایج مطالعات نشان داد که روش تعابیر نمادها و فرمول‌های ریاضی نقش کاربردی و موثری در رفع بدفهی‌ها و بهبود یادگیری مفاهیم ریاضی دارد. روش پژوهش به صورت مفهومی - استقرایی است و جامعه آماری آن شامل کلیه مقالات مرتبط به چالش‌ها، کج‌فهی‌ها و بدفهی‌های مرتبط به آموزش مفاهیم ریاضی است. نمونه در نظر گرفته شده جهت تحلیل و بررسی، با اولویت معتبر بودن مجله، تاثیرگذاری و در دسترس بودن متن کامل مقالات به روز و نگاشته شده توسط محققین آموزش ریاضی انتخاب گردید. در پایان، پیشنهادهای جهت ارتقای مهارت و توانایی دبیران و دانش‌آموزان در بکارگیری صحیح تعابیر فرمول‌های ریاضی در تسهیل یادگیری و رفع بدفهی‌ها ارائه می‌گردد.

واژگان کلیدی: روش تدریس، بدفهی، تعابیر ریاضی، نماد ریاضی

## ۱. مقدمه

ریاضیات رشته‌ای از دانش بشری است که با اعداد، الگوریتم‌ها، محاسبات و مدل‌سازی برای حل مسائل سروکار دارد. این علم با ابزارهای فکری که در جوهره خود نهفته است، منجر به پیشرفت و توسعه پایدار کشورها و جوامع بشری براساس فناوری‌های نوین، رشد اقتصادی، صنایع دانش بنیان و روحیه نقادی می‌شود. در این راستا، نظام آموزشی ایران در نظام تعلیم و تربیت رسمی و حتی غیر رسمی خود به ضرورت آموزش صحیح علوم ریاضی در راستای توسعه پایدار برای همه اعضای جامعه اتفاق نظر دارند. برای نمونه به (آزاده و همکاران، ۱۳۹۸) مراجعه نمایید.

در فرایند یاددهی- یادگیری ریاضی مدرسه‌ای (حتی دانشگاهی) موانعی وجود دارد که شناسایی و مرتفع نمودن آنها یکی از دغدغه‌های اصلی معلمان است و یکی از این موانع، بدفهمی‌های فراگیران است. بدفهمی‌ها در واقع، همان خطاهای نظامندی هستند که دارای ساختار محکم‌اند و به راحتی اصلاح نمی‌شوند. در دهه‌های اخیر، شناسایی و رفع بدفهمی‌های ریاضی در یادگیری به طور گسترده مورد توجه و مطالعه پژوهشگران قرار گرفته است. برای نمونه امیری و همکاران (۱۳۹۸)، ریحانی و همکاران (۱۳۹۱) و فاهریدین<sup>۱</sup> و همکاران (۲۰۱۹) در مورد بدفهمی‌هایی مثلثاتی؛ و سودابه تات و همکاران (۱۳۹۷) در مورد بدفهمی‌های نامعادلات، مطالعه و تحقیق نموده‌اند.

در بخش دوم این مقاله، تعبیر ریاضی را تعریف و مثال‌هایی از تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی را ذکر می‌شود تا معلّم‌ها و دانش‌آموزان از آن‌ها الگو برداری کرده و در تسهیل و تعمیق یادگیری ریاضی به کار گیرند. در بخش سوم نیز نشان داده می‌شود که تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی جزء لاینفک همه روش‌های رفع بدفهمی در حوزه ریاضی است که اگر به درستی انجام شود نقش اساسی در رفع بدفهمی‌ها ایفا می‌کند. در پایان، راهکارهایی برای ترویج و به کارگیری دقیق تعابیر ریاضی ارائه داده می‌شود. برای نمونه، تولید دست‌سازهای مناسب جهت تعبیر صحیح مفاهیم ریاضی، برگزاری کارگاه‌ها، دوره‌های کوتاه مدت و دوره‌های ضمن خدمت برای معلّم‌های ریاضی در سطح کشوری، استانی و شهرستانی را پیشنهاد داده می‌شود که نقش موثری در رفع بدفهمی‌ها برای دانش‌آموزان در مفاهیم مرتبط به دروس ریاضی ابتدایی، متوسطه و حتی دانشگاهی دارند.

## ۲. تعابیر نمادهای ریاضی

در این بخش، ابتدا تعریف تعبیر نماد ریاضی را بیان می‌شود و سپس، با برخی از مثال‌های حوزه ریاضی به تفهیم تعابیر نمادها و مفاهیم ریاضی پرداخته می‌شود.

تعریف: تعبیر نماد یا فرمول ریاضی عبارت است از بیان نماد یا فرمول ریاضی به زبان فارسی و به شکل ساده، منطقی و قابل فهم برای فراگیر.

در ادامه، مثال‌های گوناگونی از تعابیر ریاضی آورده می‌شود و بحث نیز با تعبیر فرمول احتمال، از آمار شروع می‌گردد.

<sup>1</sup> Fahrudin

مثال ۲.۲.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعبیر: احتمال وقوع پیشامد  $A$  برابر است با تعداد عناصر  $A$  تقسیم بر تعداد عناصر فضای نمونه‌ای  $S$ .

مثال ۳.۲.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

تعبیر: حد مجموع توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $a$  برابر است با مجموع حد تک تک آنها در نقطه  $a$

مثال ۴.۲.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

تعبیر: مشتق مجموع توابع  $f$  و  $g$  برابر است با مشتق  $f$  بعلاوه مشتق  $g$

مثال ۵.۲. اگر  $f: X \rightarrow Y$  و  $g: Y \rightarrow Z$  توابع یک به یک باشند آنگاه  $f \circ g: X \rightarrow Z$  تابعی یک به یک است.  
تعبیر: ترکیب توابع یک به یک، یک به یک است.

و اینک مثالی از هندسه:

مثال ۷.۲.

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

تعبیر: مثلث‌های  $ABC$  و  $A'B'C'$  هم‌نهشت هستند، هرگاه دو مثلث بر روی هم قرار دهیم بر هم منطبق شوند.

الگو برداری از مثال‌های مختلف بیان شده در بالا، تمرین و ممارست منجر به استفاده بهتر هم برای معلم‌ها و هم دانش‌آموزان می‌شود. مهارت به کارگیری تعابیر نمادها و فرمول‌های ریاضی، قدرت یادگیری را افزایش داده، و سبب تسهیل یادگیری و ذخیره‌ی بهتری از اطلاعات جهت حل مسئله ریاضی می‌شود.

نقیبی (۱۳۹۹) به روش تحلیل - مروری بر اساس پژوهش‌های مرتبط به تعابیر و زیرساختارهای اعداد گویا در دوره زمانی خاص (بین سال‌های ۱۹۷۲-۱۹۹۳) نشان داد تعابیر اعداد گویا در رفع بدفهمی آن تاثیر معناداری دارد. از اینرو گزافه نیست اگر به آن، روش تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی در آموزش ریاضی گفته شود هرچند به صورت ترکیبی در هر روش تدریسی بکار گرفته شود.

توجه نمایید اگر قرار باشد مولفین کتاب‌ها هر نماد و فرمول ریاضی را با جزییات به شیوه بالا تعبیر کنند تصور کتاب‌های قطور و نامناسب دور از ذهن نیست. از طرفی دیگر، تعبیر دقیق بعضی مفاهیم ریاضی به پیش نیازهای فراگیر و ابزارهای کمکی مانند دست‌سازه‌ها برای اشکال هندسی و ... که به هنر و شیوه استفاده معلم با توجه به سطح کلاس درس وابسته است. در نتیجه، نمی‌توان تعابیر همه نمادها را در کتاب‌ها بیان کرد در حالی که تعبیر یک فرمول ریاضی بهتر می‌توان به ذهن سپرد و همچنین به درک عمیق و تسهیل یادگیری نیز کمک می‌کند.

### ۳. نقش اصلی تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی در رفع بدفهمی‌ها

برای تعیین نقش و محاسن کلی تعابیر ریاضی در آموزش مباحث ریاضی، چندین مقاله مورد بررسی قرار داده می‌شود و نتایج حاصله به طور استقرایی تعمیم داده می‌شود. در همین راستا، به مطالعه چند نمونه از مقالاتی که بدفهمی‌های ریاضی در آنها بررسی شده است، پرداخته می‌شود و دلایل بدفهمی آنها را مورد بررسی و کنکاش قرار داده می‌شود تا نتایج و نقش موثر و کاربردی تعابیر ریاضی بهتر نمایان گردد. برای این کار، برای نمونه مقالات مرتبط به چالش‌های دانش‌آموزان پایان دوره ابتدایی در حل مسائل کلامی کسرها، بدفهمی نامعادلات، بدفهمی مثلثات، بدفهمی حد، بدفهمی در مهارت‌های هندسی و بدفهمی در مورد اعداد منفی را مورد مطالعه و بررسی قرار داده می‌شود.

بطوبی آورزمان و همکاران (۱۳۹۹) ده چالش دانش‌آموزان در حل مسایل کلامی کسرها در پایان دوره ابتدایی را شناسایی نمودند که عبارتند از:

- ۱- تغییر در ساختار جمله
- ۲- اشتباه‌های محاسباتی در عملیات کسرها
- ۳- بدفهمی در رابطه با کسرها
- ۴- باور نامناسب نسبت به پاسخ یک مسئله ریاضی
- ۵- محدود بودن تصور دانش‌آموزان نسبت به حل مساله
- ۶- مشکل مفهومی در درک مفاهیم ریاضی
- ۷- مدل سازی
- ۸- نقش عوامل عاطفی در حل مسئله

۹- پایین بودن اعتماد به نفس در رابطه با حل مسئله

۱۰- غلبه یادگیری رویه‌ای بر یادگیری رابطه‌ای

نویسندگان براساس چالش‌های فوق نشان دادند که عوامل تاثیر گذار بر حل مسائل کلامی کسر توسط دانش آموزان در دوره ابتدایی، چند لایه، پیچیده و درهم تنیده شناختی، عاطفی و زبان شناختی است. برای ارتقا توانایی‌های حل مسئله کسرها در دوره ابتدایی با توجه به چالش‌های ده گانه بالا پیشنهاداتی را ارائه نمودند. برای نمونه:

پ ۱- بخشی از آموزش کلاسی به ارتقای مهارت‌های خواندن و درک متن فارسی صورت مسئله‌ها توسط دانش آموزان اختصاص یابد.

پ ۲- از ساز و کارهای طوطی‌وار و فاقد ارزش مفهومی پرهیز شود.

پ ۳- بخشی از آموزش، به کاربرد مسائل ریاضی در زندگی واقعی و تفسیر مسائل ریاضی در دنیای واقعی اختصاص یابد تا دانش آموزان در حل مسئله‌های کلامی کسر با چالش کمتری مواجه شوند.

کاربرد تعبیر نمادهای ریاضی در رفع بدفهی‌های کسر:

براساس تعریف ۱. ۲، راهکارهای سه گانه بالا در واقع پردازشی از تعریف تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی هستند. زیرا، راهکار پ. ۱ و پ. ۲ می‌گوید اگر تعبیر نمادهای ریاضی به فارسی و بیان مسائل ریاضی به زبان نمادهای ریاضی ارتقا دهیم چالش‌ها ۱، ۳، ۶، ۷ و ۱۰ به حداقل رسیده و به درک عمیق و رفع بدفهمی مفاهیم ریاضی کمک می‌کند. در راهکار پ. ۳ ذکر می‌شود اگر مسائل ریاضی به شکل کاربردی در زندگی و دنیای واقعی تعبیر شوند آنگاه این کار منجر به افزایش اعتماد به نفس و تغییر عقیده منفی به باور مثبت در دانش آموزان در برخورد به مسائل خواهد شد (کمک به چالش‌های ۲، ۳، ۵، ۸، ۹). بنابراین، تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی در رفع و کاهش چالش‌های ده گانه در پژوهش بطوبی و همکاران (۱۳۹۹) کارساز و موثر است. لیست بدفهمی‌های ذکر شده در نامعادلات توسط تات و همکاران (۱۳۹۷) در جدول ۱ بیان می‌گردد.

جدول ۱. بدفهمی‌ها در مورد مفهوم نامعادلات

شماره	بدفهمی‌های نامعادلات
۱	نفهمیدن نشانه‌های کوچکتر از و بزرگتر از
۲	استفاده نادرست از نشانه‌های کوچکتر از و بزرگتر از
۳	تعمیم ندادن خواص تساوی‌ها به نامساوی‌ها (نامعادله همان معادله است که به جای علامت مساوی یعنی =، یکی از علامت‌های <، >، ≥ و ≤ قرار دارد و روش حل یکی است).
۴	مشکلات مربوط به معکوس کردن علامت نامساوی
۵	معنادار نبودن مسائل مربوط به نامعادلات
۶	تصور نادرست نسبت به جواب نامعادله

۷	ناتوانی در تفسیر جواب نهایی و داشتن تصور نادرست در مورد شکل جواب
۸	دانش آموزان برای نشان دادن جواب نامعادله روی محور اشتباه می کنند
۹	در تقسیم بر اعداد منفی جهت را عوض نمی کنند.

در ادامه، با روش تدریس پیشنهادی زیر «یعنی گروه‌بندی دانش‌آموزان بدین ترتیب که در هر گروه یک شاگرد قوی، یک شاگرد ضعیف و دو شاگرد متوسط قرار می‌گیرد»، نقش موثر این روش تدریس در رفع بدفهمی نامعادلات را نشان دادند.

تاثیر تعبیر نمادهای ریاضی در رفع بدفهمی‌های نامعادلات:

پس از بررسی موارد بدفهمی بالا، از تعریف ۱. ۲ مستقیماً نتیجه می‌شود که بدفهمی‌های موارد ۱، ۲، ۵، ۶ و ۷ را با تعبیر درست و مناسب توسط معلم می‌توان به حداقل رساند. در همین راستا، جهت درک بهتر و یادگیری موثر از فراگیرنده باید خواسته شود به بیان فرمول‌ها و نمادهای ریاضی بدون نماد پردازد به زبان دیگر تعبیر آنها را ذکر کند. به برخی از موارد بدفهمی شناسایی شده، توسط امیری و یافتیان (۱۳۹۸) با بررسی دانش‌آموزان پایه یازدهم، علامه و گویا (۱۳۹۳) در پژوهش خود روی دانش‌آموزان سال دهم متوسطه، فاهردین و همکاران (۲۰۱۹)، ریحانی و همکاران (۱۳۹۱) و رنجبر (۱۳۹۷) در رابطه با بدفهمی‌های مرتبط با حوزه مثلثات برای دانش‌آموزان را در ادامه بیان می‌شود عبارتند از:

۱. مفهوم اندازه زاویه را به خوبی درک نکرده‌اند.
۲. واحدهای اندازه‌گیری زاویه یعنی درجه و رادیان را به درستی نمی‌شناسند.
۳. روش تعیین مقدار تقریبی سینوس یا کسینوس یک زاویه را روی دایره مثلثاتی و با توجه به محورهای سینوس و کسینوس نمی‌دانند.
۴. در تعیین حدود تغییرات نسبتهای مثلثاتی زوایای نامشخص، توانایی کافی ندارند.
۵. عدم درک مناسب از تعریف درجه، ناتوانی در برقراری ارتباط بین مفهوم رادیان و مفهوم کمان، برابر گرفتن یک رادیان و ۱۸۰ درجه و درک رادیان محدود به فرمول است.
۶. در مقایسه با دایره مثلثاتی، بیشتر برای حل مسئله‌های مثلثاتی از مثلث قائم الزاویه استفاده می‌کنند و به خوبی از دایره مثلثاتی برای حل مساله نمی‌توانند استفاده کنند.
۷. عدم درک نمادهای ریاضی و چگونگی به کارگیری آنها در بیان گزاره‌های ریاضی
۸. دانش‌آموزان مفهوم دوره تناوب را در توابع مثلثاتی درک نمی‌کنند.
۹. مقادیر مثلثاتی را در زاویه‌های خاص، فراموش می‌کنند.

تاثیر تعبیر نمادهای ریاضی در رفع بدفهمی‌های بالا:

از بررسی موارد بدفهمی‌های بالا بر اساس تعریف تعبیر نمادهای ریاضی مشاهده می‌شود که بدفهمی‌های موارد ۱، ۲، ۵، ۷، ۸. به وسیله وسایل دست سازه و نرم افزارها و تلفیق با روش‌های مناسب دیگر می‌توان به طور صحیح و مناسب تعبیر نمود و گام اساسی در رفع بدفهمی‌ها برداشت. بنابراین، نقش کلیدی تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی در رفع بدفهمی‌های حوزه مثلثات به طور غیر مستقیم به وسیله راهکارهایی که برای رفع بدفهمی‌های موجود در مثلثات که توسط این‌ها و محققین دیگر بیان شده است تایید می‌شود. برای نمونه موسی‌پور و همکاران (۱۴۰۰)، در بدفهمی مثلثات سه راهکار: روش تدریس مناسب، استفاده از نرم افزارها و استفاده از نقشه‌های مفهومی را در جهت رفع بدفهمی مثلثات بیان و نشان دادند که موثر واقع شدند.

ریحانی و همکاران (۱۳۹۵)، بدفهمی‌های رایج در مورد مفهوم حد در دانش‌آموزان سال سوم متوسطه را همراه با درصد توزیع فراوانی آن‌ها براساس تیم شرکت کننده در تحقیق در جدول زیر تشریح نمودند:

جدول ۲. بدفهمی‌های رایج در مورد مفهوم حد

شماره	بدفهمی‌های حد	درصد ها
۱	حد و نمادها	۴۰
۲	حد و حرکت	۲۲
۳	حد و غیر قابل دسترس	۳۵
۴	حد و جایگزینی	۵۰
۵	حد و بی نهایت	۷۹
۶	حد و تفسیر نمودار	۵۴

کاربرد تعبیر نمادهای ریاضی در رفع بدفهمی‌های حد:

ریحانی و همکاران (۲۰۱۸) در مطالعه و بررسی درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه رشته تجربی و ریاضی از مفهوم حد براساس نظریه یادگیری APOS، نشان دادند که اکثریت دانش‌آموزان مفهوم حد را به خوبی درک نکرده و مشکلات فراوانی در درک این مفهوم دارند که ریشه اصلی آن در ساخت و سازهای ناقص مفهوم حد در ذهن فراگیران است. نتایج این پژوهش، مثلاً "عدم درک"، بنابر تعریف تعبیر نمادهای ریاضی، کاملاً به نقش موثر تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی در رفع موارد شش گانه‌ی بدفهمی‌های رایج حد یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ اشاره می‌کند. بنابراین، باید دغدغه اصلی معلّم در معرفی مفهوم حد این باشد که تعبیری دقیق و صحیحی از حد با استفاده از شیوه مناسب و سطح دانشی فراگیران در آنها بسازد. در این راستا، جهت تعبیر مناسب می‌تواند از نرم افزارهای گرافیکی و ترسیم نمودار به عنوان تلفیقی از شیوه تدریس بهره گیرد. در واقع، اگر توسط معلّم تعبیر حد تابع، تعبیر و درک درست از زبان و نمادهای به کار رفته برای تعریف حد و تعبیر مفهوم بی‌نهایت و تفسیر نمودار به طور مناسب انجام شود آنگاه نقش تعبیر در افزایش درصدهای رفع بدفهمی‌های حد در پژوهش ریحانی و همکاران (۱۳۹۵) نمایان خواهد شد.

عالمیان و همکاران (۱۳۹۷) در پژوهشی با جامعه آماری دانش آموزان پسر پایه هشتم شهرستان سندج در سال تحصیلی ۹۵-۹۶ پرداخته و نتیجه آن را بر روی آزمونی محقق ساخته، و از این آزمون سیزده نوع بدفهمی در مهارت‌های هندسی را شناسایی کردند که عبارتند از:

۱. درک نادرستی از تعریف چند ضلعی‌ها دارند.
۲. خط‌های تقارن و داشتن یا نداشتن مرکز تقارن در شکل‌ها را به درستی تشخیص نمی‌دهند.
۳. تصور می‌کنند هر نقطه که در فضای داخلی شکل قرار گیرد، مرکز تقارن است.
۴. درک درستی از زاویه ندارند.
۵. از نقاله به درستی استفاده نمی‌کنند (با توجه به اینکه روی نقاله دو ردیف عدد نوشته شده است).
۶. درک نادرستی از تعریف برخی از چهارضلع‌های خاص دارند.
۷. مربع را از دسته مستطیل‌ها جدا می‌دانند.
۸. پس از نوشتن رابطه فیثاغورس، در جاگذاری اندازه‌های اضلاع دچار اشتباه می‌شوند.
۹. در شکل‌های شلوغ خط‌های موازی و مورب را به درستی تشخیص نمی‌دهند.
۱۰. درک درستی از اثبات ندارند.
۱۱. مشکل دیگر بیشتر دانش آموزان در مورد هم‌نهستی دو مثلث است. در تشخیص دو مثلث، اگر مثلث‌ها کاملاً جدا از هم باشند، به راحتی آنها را می‌بینند، اما اگر دو مثلث در یک ضلع یا یک زاویه مشترک باشند، تشخیص آنها برایشان بسیار مشکل می‌شود. و چون دقیقاً نمی‌دانند چه کاری می‌خواهند انجام دهند، دو مثلث دیگر را که آشکار هستند، به اشتباه در نظر می‌گیرند.
۱۲. تفاوت اندازه و طول کمان را تشخیص نمی‌دهند.
۱۳. عبارت‌هایی مانند «وتر نظیر به یک کمان» و «کمان نظیر به یک وتر» برایشان ناملموس است.

کاربرد تعبیر نمادهای ریاضی در رفع بدفهمی‌های مهارت هندسی:

تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی در رفع و کاهش بدفهمی‌های بالا موثر است. برای نمونه، در رفع یا کاهش بدفهمی‌های مرتبط به حجم، مساحت، هم‌نهستی، تفاوت اندازه و طول کمان و ... معلّم با کمک اجسام هندسی دست‌ساز و حتی استفاده از نرم افزارهای گرافیکی رسم اشکال سه بعدی، به دلیل مشاهده، قابل لمس بودن اشکال و ارتباط با دنیای واقعی توسط حافظه تصویری فراگیر، تعبیر دقیق و مناسبی از مفاهیم حجم و هم‌نهستی و ... ارائه می‌دهد که منجر به رفع بدفهمی در این مفاهیم مرتبط در سال‌های بعدی تحصیل می‌شود. یافته‌های پژوهش مهدیان و همکاران (۱۳۹۶) در تاثیر غیر مستقیم حافظه تصویری بر رشد تفکر هندسی و تاثیر مستقیم معرفت شناسی علمی هندسی بر رشد تفکر هندسی و همچنین نتایج پژوهش عظیم‌پور و همکاران (۱۳۹۶) در کج فهمی حجم و گنجایش ادعای ما را که تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی در رفع بدفهمی‌ها موثر است را تایید می‌کند.

یکی از موضوعات چالش برانگیز در طول تاریخ برای ریاضی دانان مفهوم اعداد منفی بوده است که شکل امروزی آن مدیون پژوهش‌های زیادی در طول چند قرن بوده است. کیل هامن<sup>۲</sup> در پژوهشی در سال ۲۰۱۱ مراحل شکل‌گیری و سیر تکاملی اعداد منفی از قرن ۱۶ تا قرن ۱۹ را به صورت خلاصه به شکل زیر بیان نموده است:

- قرن ۱۶: عدم شناخت اعداد منفی؛
- قرن ۱۷: شناخت اعداد منفی به عنوان ریشه معادلات؛
- اواخر قرن ۱۷ و اوایل قرن ۱۸: استفاده محتاطانه از اعداد منفی به دلیل برخی تناقضات؛
- قرن ۱۸: استفاده آزادانه از اعداد منفی و ورود آن‌ها به کتب درسی بدون تعریف ریاضی؛
- قرن ۱۹: تلاش برای تحکیم مبنای ریاضی اعداد منفی؛
- انتهای قرن ۱۹: تعریف رسمی اعداد منفی.

امروزه، در کشور ما دانش‌آموزان با اعداد منفی در پایه ششم برای اولین بار آشنا می‌شوند و در پایه هفتم بسط داده می‌شود. وجود بدفهمی‌ها در فرایند آموزش اعداد منفی به دانش‌آموزان منجر به انجام پژوهش‌های متعددی در زمینه‌ی شناسایی و رفع بدفهمی‌های اعداد منفی شده است. یافتیان و همکاران (۱۳۹۹) براساس پژوهش‌های مرتبط، عمده‌ترین بدفهمی‌های مرتبط به اعداد منفی را در حالت کلی به سه دسته زیر تقسیم نمودند و سپس به اجمال مورد مطالعه قرار دادند:

۱. مفهوم عدد منفی
۲. ترتیب اعداد صحیح
۳. اعمال چهار گانه روی اعداد صحیح

کاربرد تعبیر نمادهای ریاضی در رفع بدفهمی‌های اعداد منفی:

در مورد بدفهمی دسته ۱، یافته‌های پژوهش آئی<sup>۳</sup> (۲۰۱۹) نشان می‌دهد که بیشتر دانش‌آموزان، اعداد منفی را به وسیله علامت «-» تعریف کرده‌اند. یعنی، اغلب دانش‌آموزان سعی می‌کنند اعداد منفی به صورت نمادین بفهمند. اکنون معلم با تعبیر درست مفهوم اعداد منفی مثلاً با استفاده از مثال‌های مانند درجه هوای منفی، مفهوم طلبکار و بدهکار و وام گرفتن از بانک در شیوه تدریس خود در رفع بدفهمی اعداد منفی گام اساسی برمی‌دارد؛ پژوهش‌های راشدی (۱۳۹۲)، وسمن-اینزینگر<sup>۴</sup> (۲۰۱۹) و بوفر دینگ<sup>۵</sup> (۲۰۱۴) این راهکار را تایید می‌کنند.

در مورد بدفهمی دسته ۲، نتایج پژوهش ریحانی و همکاران (۱۳۹۴) موارد بدفهمی زیر را در مقایسه اعداد منفی بیان می‌کند:

دسته اول دانش‌آموزان: صفر را به عنوان کوچکترین عدد در نظر می‌گیرند و اعداد منفی را کوچکتر از اعداد مثبت می‌دانند ولی قادر به مرتب کردن اعداد منفی نیستند.

<sup>۲</sup> Kilhamn

<sup>۳</sup> Ay

<sup>۴</sup>Wessman-Enzinger

<sup>۵</sup> Bofferding

دسته دوم دانش‌آموزان: صفر را به عنوان کوچکترین عدد تصور می‌کنند و اعداد منفی را بزرگتر از مثبت‌ها در نظر می‌گیرند.

دسته سوم دانش‌آموزان: اعداد منفی را کوچکتر از صفر و اعداد مثبت در نظر گرفته ولی قادر به مرتب کردن اعداد منفی نیستند.

دسته چهارم دانش‌آموزان: همه اعداد را مثبت در نظر می‌گیرند به نظر می‌رسد این دانش‌آموزان درکی از مفهوم اعداد منفی ندارند.

به‌علاوه در مورد بدفهمی دسته ۳، درک مفهوم عملگر منفی، بدفهمی رایج در دانش‌آموزان است؛ برای نمونه، یافتیان و همکاران (۱۳۹۹) ضمن تاکید بر این بدفهمی، راهکار استفاده از الگوهای عددی و محور اعداد در شیوه تدریس معلم در رفع آن را پیشنهاد می‌کنند. این راهکار بنابر تعریف تعبیر، شیوه تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی در رفع بدفهمی‌هاست.

اکنون با تحلیل نتایج حاصله از کاربرد و تاثیر تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی در مقالات متعددی که در این بخش مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند به تاثیر و نقش مثبت راهکار تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی در آموزش مباحث ریاضی تاکید و اشاره می‌کنند. واقعیت این است که معلم‌ها و پژوهشگران در شیوه‌های تدریس و برخی راهکارهای ارائه شده در مقالات و پژوهش‌های مرتبط به رفع بدفهمی‌های حوزه آموزش ریاضی، به طور نامحسوس یا ناخواسته به مفهومی که در پژوهش حاضر از آن به "تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی" یاد می‌شود نیز اشاره نموده‌اند، که با تحلیل استقرایی می‌توان نتیجه گرفت که روش تعبیر نمادها و فرمول‌های ریاضی نقش مثبت و موثری با درجه اهمیت بالا در رفع بدفهمی‌های مرتبط به مباحث ریاضی دارد.

#### ۴. بحث و نتیجه‌گیری

نتایج پژوهش حاضر، اهمیت توجه بیشتر به راهکار "تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی" را خاطر نشان می‌سازد. در تمام مقالات و پژوهش‌های مرتبط به بدفهمی‌های حوزه ریاضیات، یکی از راهکارهای مناسب به کارگیری شیوه تدریس مناسب با آن محتوا یا ادغام چند شیوه موثر بوده است. تدریس، تعامل یا رفتارهای متقابل دانش‌آموزان با معلم براساس طرحی منظم و هدفدار برای ایجاد تغییرات نسبتاً پایدار در رفتار دانش‌آموزان است. از طرفی دیگر، بنابر تعریف ۲.۱، تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی جزء لاینفک هر روش تدریسی است. لذا تعبیر نمادها می‌تواند منجر به تعامل موثرتر در تدریس شود. به دلیل نقش پررنگ و کلیدی تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی، اگر قرار باشد مؤلفین در نوشتن کتاب‌ها به بیان مفاهیم ریاضی به این شیوه پردازند منجر به تولید کتاب‌هایی حجیم و قطوری خواهد شد که معایبی از قبیل متناسب نبودن با زمان تدریس، ممانعت از خلاقیت در بیان تعبیر، شکل ظاهری نامناسب کتاب‌ها و ... را به دنبال دارد که شایسته نیست. بنابراین، یکی از بهترین راهکارها این است که معلم‌ها با بیان تعبیر بدون نماد نقش تسهیل‌گری و همچنین کمک به درک عمیق مطلب مورد بحث در دانش‌آموزان نمایند. لازم به ذکر است، شیوه‌های تدریس معلم حدود ۶۰ درصد یا بیشتر روی فراگیران تاثیر دارد. با توجه به راهکار "تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی" افزایش تاثیرات مثبت قابل پیش‌بینی است.

بر اساس بخش ۳، تعابیر نمادها و مفاهیم ریاضی به عنوان بخشی یا تلفیقی از شیوه تدریس گام موثری در رفع بدفهمی‌ها در همه حوزه‌های مرتبط به آموزش ریاضی است. از این رو، جهت تأکید و به کاربردن دقیق و مناسب تعابیر نمادها و فرمول‌های ریاضی به عنوان گام اساسی در جهت آموزش موثر و رفع بدفهمی‌ها در تمام حوزه‌های مرتبط به مباحث ریاضی، راهکارهای زیر پیشنهاد می‌شود:

- مهارت به کارگیری تعابیر نمادها و فرمول‌های ریاضی توسط معلم و حتی فراگیر.
- تولید دست سازه‌های مناسب جهت تعبیر صحیح مفاهیم ریاضی.
- استفاده از واقعیت افزوده به کمک نرم افزار جنوجبرا.
- به کارگیری از فناوریهای نوین آموزشی مانند نرم افزارهای گرافیکی و ترسیمی در بیان تعبیر نمادها و مفاهیم ریاضی.
- بیان تاریخچه مختصر تاریخی از مفهوم ریاضی قبل از معرفی و تعبیر آن.
- تعبیر برخی مسائل ریاضی را به کمک کاربردهای آنها در زندگی و دنیای واقعی
- طراحی بازی‌هایی برای دانش آموزان در جهت تعبیر درست بعضی مفاهیم ریاضی.
- استفاده تلفیقی از مهارت تعابیر با شیوه‌های تدریس.
- برگزاری کارگاه‌های آموزشی برای دبیران و اساتید.
- برگزاری دوره‌های کوتاه مدت و دوره‌های ضمن خدمت در سطوح کشوری، استانی و شهرستانی برای معلم‌های آموزش و پرورش (حتی اساتید دانشگاه) جهت ارتقا کمی و کیفی.

#### منابع

- آزاده، پروانه؛ رجالی، علی (۱۳۹۸). هشدار به جامعه ریاضی ایران و علاقه مندان به توسعه پایدار کشور، فرهنگ و اندیشه دوره ۳۸، شماره ۶۵، صفحات ۱۳ تا ۳۵.
- اسکندری، فرزاد؛ صالحی، مهدی (۱۳۸۷). تأثیر انگیزه و علاقه بر رابطه سبکهای تدریس-یادگیری و عملکرد درسی، علوم ترویج و آموزش کشاورزی، ایران.
- امیری، پریسا؛ یافتیان، نرگس (۱۳۹۸). شناسایی بدفهمی های دانش آموزان از نسبتهای مثلثاتی. هفدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، تبریز.
- بطویی آورزمان، مونا؛ محسن پور، مریم، گویا، زهرا (۱۳۹۹). شناسایی چالش‌های دانش آموزان در حل مسائل کلامی کسر در پایان دوره ابتدایی، پژوهش در آموزش ریاضی، دوره ۱، شماره ۲، صفحات ۴۴-۲۷.
- تات، سودابه؛ محمدنیا، لیلا (۱۳۹۷). بررسی بدفهمی‌ها در مبحث نامعادلات پایه نهم، پویش در آموزش علوم پایه، دوره چهارم، شماره سوم.
- ریحانی، ابراهیم؛ امام جمعه، سید محمد رضا؛ صالح صدقپور، بهرام؛ مرادیویس، اصغر (۱۳۹۸). ارزیابی دانش معلمان و دانشجویان ریاضی در درس هندسه با استفاده از نظریه ون هیل، نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش، جلد ۵، شماره ۲.

- ریحانی، ابراهیم؛ بخشعلی زاده، شهرناز؛ استادی، مریم (۱۳۹۱). تاثیر کاربرد نقشه های مفهومی بر درک دانش آموزان رشته ریاضی از توابع مثلثاتی. رویکردهای نوین آموزشی، دوره ۷، شماره ۲، صفحات ۵۲ - ۲۳.
- ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده؛ راشدی، فرزانه (۱۳۹۴). بررسی درک و فهم دانش آموزان از اعداد منفی و بدفهمی های آنان، نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش، جلد ۱۰، شماره ۱، صفحات ۴۱-۲۵.
- ریحانی، ابراهیم؛ شریفی، زهرا؛ سلطانی، محمد (۱۳۹۵). بررسی بدفهمی آموزان سال سوم متوسطه در مورد مفهوم حد، فصلنامه تعلیم و تربیت، شماره ۸۲۱.
- عالمیان، وحید؛ سیدی، محمد؛ حبیبی، ملوک (۱۳۹۷). شناسایی بدفهمی های دانش آموزان پایه ی هشتم در مهارت های هندسی در هندسه و استفاده از نظریه ی ون هیلی برای ارتقاء و بهبود سطح مهارت های هندسی دانش آموزان، فصلنامه نوآوری های آموزشی، سال هفدهم، شماره ۶۷، صفحات ۱۲۲-۱۴۸.
- عظیم پور، سهراب؛ حسینی صدر، صمد؛ واحدی، حسین (۱۳۹۶). بررسی کج فهمی در مفاهیم حجم و گنجایش در بین دانش آموزان پایه ی ششم ابتدایی، پویش در آموزش علوم پایه، دوره ۳، شماره ۹، صفحات ۱۱-۱.
- مهدیان، مصطفی؛ لیاقت دار، محمد جواد؛ عریضی حمیدرضا (۱۳۹۶). ارائه مدلی جهت رشد تفکر هندسی: تاثیر حافظه تصویری بر رشد تفکر هندسی از طریق معرفت شناسی علمی هندسه، مجله علوم تربیتی دانشگاه شهیدچمران اهواز، سال ۲۴، دوره ۶، شماره ۱، صفحات ۶۸-۴۵.
- موسی پور، منصوره؛ شاه محمدزاده، سپیده (۱۴۰۰). بدفهمی های رایج در مثلثات در دوره متوسطه و چند راهکار برای مقابله با آنها، فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه، دوره ۷، شماره ۵۲.
- نقیبی، مهدخت (۱۳۹۹). بررسی و تحلیل چهارچوب های نظری تعابیر اعداد گویا، پژوهش در آموزش ریاضی، دوره ۱، شماره ۲، صفحات ۲۶-۱۳.
- یافتیان، نرگس؛ مهدوی، نگار؛ مهرآئین، بیتا (۱۳۹۹). مشکلات و بدفهمی های دانش آموزان درخصوص مفهوم اعداد منفی، جلد ۵، شماره ۱، صفحات ۴۸-۳۷.
- Kilhamn, C. (2011). Making Sense of Negative Numbers. Department of Pedagogical, Curricular and Professional Studies. Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Gothenburg.
- Fahrudin, D. (2019). Mardiyana. and Pramudya. J. *Profile of students' errors in trigonometry Equations. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 1188012044.
- Reyhani, E, Sharifi, Z. (2018). Investigation of the conception of third-grade female high school students of the concept of limit and continuity, *Tech. Edu. J.* 12(3): 171-183.
- Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *J. Research Math. Ed.* 45, 94-245.
- Wessman-Enzinger, N.M., & Mooney, E. (2019). S. Conceptual models for integer addition and subtraction. *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech*, 50, 1-28.