دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه
دوره دهم، شماره ۳۴، بهار ۱۴۰۳

Farhangian University
Quarterly Journal of Education in Basic Sciences
Volume 10, Issue 34, Spring, 2024

مقدمه‌ایی بر باتری های کوانتومی بسته

سیدنوید الیاسی[۱]

دریافت:۱۴۰۲/۱/۱۹ پذیرش: ۱۴۰۲/۸/۱۲

چکیده

در چندسال اخیر، فناوری های کوانتومی در سرتاسر دنیا پیشرفت های چشمگیری داشته است و پژوهشگران برای ارتقاء آنها تحقیقات بسیار زیادی انجام داده‌اند. در این میان، باتری های کوانتومی از این قاعده مستثنی نیستند. باتری‌هایی که در لوازم الکترونیکی وجود دارند عمل ذخیره سازی انرژی را بر اساس فرایند های الکتروشیمیایی انجام می‌دهند و مقیاس آن ها به صورت ماکروسکوپیک است. اما می‌توان در سطح میکروسکوپیک، سامانه‌هایی را معرفی کرد که انرژی را برای ما ذخیره کرده و در صورت نیاز از آن کار استخراج کنیم. در بررسی این سامانه ها، مفاهیمی از قبیل ارگوتروپی، توان شارژ و پایداری از اهمیت بسیار بالایی برخوردار هستند. در این مقاله، به معرفی باتری های کوانتومی پرداخته و تعاریفی که لازم است به درک کلی از این لوازم داشته باشیم را معرفی خواهیم کرد. در پایان نیز یک با طرح یک مثال از یک باتری کوانتومی، مفاهیم مروبطه را بکار می بریم.

واژگان کلیدی: باتری کوانتومی، ارگوتروپی، توان شارژ، پایداری.

[۱]. دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک اپتیک و لیزر دانشگاه کردستان، ایران، navid.elyasi۹۷@gmail.com

مقدمه

باتری‌ها لوازمی هستند که ما در شبانه‌روز به‌صورت مستمر با آن‌ها سروکار داریم. درواقع، باتری‌ها وظیفه ذخیره انرژی را بر عهده دارند. ما می‌توانیم آن‌ها را شارژ کرده و در صورت نیاز انرژی ذخیره‌شده در آن را با متصل کردن به یک مصرف‌کننده، تخلیه نماییم. انواع مختلف این نوع از باتری‌ها همچون لیتیوم- یون، لیتیوم- کادمیوم، لیتیوم- پلیمر و انواع دیگر با اشکال مختلف و بر حسب نیازهای متفاوت در طیف وسیعی از لوازم الکترونیکی استفاده شده‌اند. برای هر کدام از این نوع باتری‌ها قطعاً مطالعات نظری و تجربی بسیاری صورت گرفته تا توانستند خود را وارد عرصه صنعت نمایند. باتری‌هایی که به‌صورت مرسوم از آن‌ها استفاده می‌کنیم، انرژی الکتریکی را به‌صورت انرژی پتانسیل شیمیایی و با رهیافت‌های متفاوت در خود ذخیره می‌کنند. در مطالعه توسعه این‌گونه از باتری‌ها، مفاهیمی همچون ظرفیت باتری، پایداری، طول عمر و غیره در مقالات متعدد مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند(پلین و همکاران، ۲۰۲۱).

با پیشرفت مکانیک کوانتومی در حوزه‌های مختلف و تمایل تبدیل علم به عمل و تولید فناوری، پای باتری‌های کوانتومی اولین بار با تعریفی ساده از آن‌ها در سال ۲۰۱۳ به میان کشیده شد. به تعریف اولیه آلیسکی، باتری کوانتومی یک سامانه کوانتوم مکانیکی کوچک است که انرژی در آن به شکل موقت ذخیره شده و با انتقال آن به مصرف‌کننده، می‌توان از آن، کار استخراج کرد(آلیسکی و فانس، ۲۰۱۳). تحقیقات سال‌های اخیر نشان داده است تکنولوژی‌هایی که مکانیک کوانتوم، پایه و اساس آن‌ها است، بسیار بهینه‌تر از نمونه‌های کلاسیکی خود بوده‌اند(دفنر و همکاران، ۲۰۰۳). این اعتقاد نیز وجود دارد که با بررسی باتری‌ها در حوزه مکانیک کوانتومی می‌توان بهره‌وری آن‌ها را افزایش داد. در سال‌های اخیر، مطالعه باتری‌های کوانتومی توجه بسیاری را به خود جلب کرده است و پژوهشگران بسیاری از جنبه نظری به این موضوع پرداخته‌اند (دلمونته و همکاران، ۲۰۲۱). جالب آنکه بخشی از تحقیقات در حوزه باتری‌های کوانتومی، به عرصه عمل نیز وارد شده‌اند(والیکورسا و همکاران، ۲۰۲۲).

دو نوع دیدگاه در رابطه با بررسی باتری های کوانتومی وجود دارد. دیدگاه اول بررسی این سامانه به صورت بسته بوده و دیدگاه دوم بررسی آن به صورت باز است. در حالت بسته فرض بر این است که سامانه با جهان اطراف خود هیچ ارتباطی ندارد. بنابراین فرآیند های شارژ و تخلیه آن ها بدون در نظر گرفتن اتلاف محاسبه می شود. اما در مقابل هنگامی که باتری به صورت باز در نظر گرفته می شود، در محاسابت اثرات محیط اضافه می شود(بروئر، ۲۰۱۲). قابل ذکر است که یه علت دشوار بودن این محاسبات، محیط به صورت مدل هایی در نظر گرفته می شوند که قابل حل باشند(بروئر و پتروچیونی، ۲۰۰۲). هر باتری کوانتومی دارای یک حالت اولیه ρ و یک هامیلتونی H است. در اینجا، کار قابل استخراج برگشت‌پذیر با استفاده از تحول سامانه به‌صورت یکانی به دست خواهد آمد. همچنین، هدفی که برای این کار مشخص می‌کنیم، آن است که بتوانیم حداکثر این مقدار را به دست آوریم(حاتمی کمین و همکاران، ۲۰۲۰). در همین راستا، اثبات شده که در برخی از حالت‌ها که باتری در آن قرار گیرد، نمی‌توان از آن کار استخراج نمود که حالت‌های منفعل ۱گذاری می‌شود.

در این مقاله قصد داریم به صورت مروری به بررسی باتری های کوانتومی بسته بپردازیم. در ابتدا تعاریف مهمی همچون کار کوانتومی، حالت های منفعل و ... مورد بررسی قرار خواهند گرفت که خواننده دید نسبتا کلی و جامعی درباره این بحث داشته باشد. سپس، با طرح یک مثال از یک اتم دوترازه‌ایی که به عنوان باتری کوانتومی در نظر گرفته و با جذب دو فوتون شارژ می شود، بحث را به اتمام می رسانیم.

---

۱ Passive states

کار کوانتومی (ارگوتروپی[1])

در این بخش، ما حداکثر کار (ارگوتروپی) قابل استخراج از یک سامانه کوانتومی (با محترم شمردن ترمودینامیک کوانتومی) را معرفی می‌کنیم. باتری کوانتومی نیز یک سامانه کوانتومی کوچک بوده که می‌توان از آن، کار استخراج نمود. قطعاً مطالعه حداکثر کار قابل استخراج می‌تواند جهت توصیف بهره‌وری آن مفید واقع شود.

شکل ۱: فرایند استخراج کار از یک باتری کوانتومی به‌صورت چرخه‌ای حاصل از تغییرات انرژی پتانسیل سامانه

ارگوتروپی حداکثر کاری است که می‌توان با استفاده از یک فرآیند چرخه‌ای یکانی، از یک سامانه کوانتومی بدون تغییر در ساختار آن استخراج کرد(الهوردیان و همکاران، ۲۰۰۴). ما یک هامیلتونی وابسته به زمان را از سامانه در نظر می‌گیریم که متشکل از هامیلتونی آزاد و یک پتانسیل چرخه‌ای وابسته به زمان است. در تعریف این پتانسیل، شرط زیر روی آن گذاشته می‌شود:

$$\hat{H}_{(t)} = \hat{H} + \hat{V}_{(t)}$$

$$V_{(0)} = 0, V_{(\tau)} = 0 \rightarrow V_{(\tau)} = V^{\dagger}_{(\tau)}$$

به این معنا که در ابتدا و پایان فرآیند چرخه‌ای استخراج کار، مقدار آن صفر می‌شود. به بیان دیگر، می‌توان این‌گونه تفسیر کرد که در آغاز و پایان فرایند، سامانه دستخوش تغییر نخواهد شد. تحولات یک سامانه بسته کوانتومی با استفاده از عملگرهای یکانی انجام می‌شوند. در اینجا نیز چون با یک باتری کوانتومی بسته سروکار داریم، می‌توانیم تحول آن را با استفاده از عملگر یکانی زیر برای یک هامیلتونی وابسته به زمان تعریف نماییم:

$$U = T\exp\{-i\int_{0}^{\tau} dt(H + v_{(t)})\}$$

حال می‌توانیم با استفاده از عملگر تحول داده‌شده، ماتریس چگالی سامانه را به‌راحتی به دست آوریم:

$$\rho_{(\tau)} = U_{(\tau)}\rho U^{\dagger}_{(\tau)}$$

درنتیجه، با استفاده از این رهیافت می‌توانیم کار استخراج‌شده را بدین‌صورت تعریف کنیم:

$$W = Tr(\rho H) - Tr(\rho_{(\tau)} H)$$

حال می‌توانیم حداکثر کار قابل استخراج از سامانه را به شکل زیر بنویسیم:

$$W_{max} = Tr(\rho H) - \min[Tr(U_{(\tau)}\rho U^{\dagger}_{(\tau)} H)]$$

---

[1] Ergotropy

که به این معادله، ارگوتروپی سامانه یا همان حداکثر کار قابل استخراج در یک فرایند چرخه‌ای یکانی بدون تغییر سامانه گفته می‌شود. در اینجا، عمل کمینه‌گیری بر روی تمامی مجموعه عملگرهای تحول سامانه گرفته می‌شود. جمله ارگوتروپی زمانی به بیشینه مقدار خود خواهد رسید که عملگری از میان مجموعه عملگرهای تحول زمانی انتخاب شود که جمله دوم را کمینه نموده و حالت سامانه را به حال منفعل متناظر با آن هدایت کند. در بخش بعد، به ارائه توضیح‌های دقیق‌تر و قابل‌درک‌تری از حالت‌های منفعل خواهیم پرداخت. درواقع، معادله بالا، اختلاف انرژی درونی بین دو حالت اولیه و ثانویه سامانه است. درنتیجه، می‌توان معادله بالا را به شیوه ساده‌تری به شکل زیر بیان کرد:

$$W_{max} = E_{(0)} - E_{(\tau)} \rightarrow E = Tr(\rho_{(t)} H) \rightarrow 0 \le t \le \tau$$

$E = Tr(\rho_{(t)} H)$ همان میانگین انرژی درونی باتری کوانتومی است.

حالت های منفعل

حالت‌های منفعل[۱]، حالت‌هایی هستند که نمی‌توان از آن‌ها کار استخراج کرد.

قضیه: σ یک حالت منفعل است اگر و فقط اگر:

$$\left[\sigma_p, H_0\right] = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p = \sum_j^d r_j \left|\varepsilon_j\right\rangle\left\langle\varepsilon_j\right| \rightarrow r_{j+1} \le r_j \\ H = \sum_j^d \varepsilon_j \left|\varepsilon_j\right\rangle\left\langle\varepsilon_j\right| \rightarrow \varepsilon_{j+1} \ge \varepsilon_j \end{array} \right\}$$

اثبات: برای هر سامانه کوانتومی می‌توانیم یک هامیلتونی و یک ماتریس چگالی در نظر بگیریم، به این صورت که:

$$H = \sum_j^d \varepsilon_j \left|\varepsilon_j\right\rangle\left\langle\varepsilon_j\right|$$

$$\rho = \sum_j^d r_j \left|r_j\right\rangle\left\langle r_j\right|$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، اگر سامانه در حالت منفعل باشد، به این معناست که نمی توان از آن کار استخراج کرد و به باتری به کمترین مقدار انرژی درونی خود دست یافته است. حال با توجه به رابطه ۰ که برای ارگوتروپی یک سامانه بسته طرح شد، می بایست جمله دوم را کمینه سازیم. لذا با استفاده از مشتق گیری بر روی تمام عملگر های تحول زمانی سامانه خواهیم داشت:

$$\delta Tr(U_{(\tau)} \rho U_{(\tau)}^{\dagger} H) = 0$$

با انجام عمل بالا می توانیم نقاط اکسترمم آن را پیدا کنیم. حال چون مشتق، عملی خطی است؛ بنابراین، می‌توانیم آن را وارد کنیم، به این صورت که:

$$Tr(\delta U_{(\tau)} \rho U_{(\tau)}^{\dagger} H + U_{(\tau)} \rho \delta U_{(\tau)}^{\dagger} H) = 0$$

---

۱ Passive states

حال می‌توانیم تغییرات عملگر یکانی U را به‌صورت حاصل‌ضرب یک عملگر یکانی و یک عملگر پاد الحاقی در نظر بگیریم. آنگاه خواهیم داشت:

$$\delta U = XU \rightarrow X^{\dagger} = -X$$

درنتیجه، خواهیم داشت:

$$\mathrm{Tr}(XU_{(\tau)}\rho U_{(\tau)}^{\dagger}H - U_{(\tau)}\rho U_{(\tau)}^{\dagger}XH) = \mathrm{Tr}(X\rho_{(\tau)}H - \rho_{(\tau)}XH)$$
$$= \mathrm{Tr}(X[\rho_{(\tau)}, H]) = 0$$

در اینجا، شرط اول منفعل بودن حالت سامانه به دست آمد. این شرط بدین معناست که بردارهای ویژه ماتریس چگالی و هامیلتونی در پایه‌های انرژی و یکسان باشند اما این شرط به‌تنهایی حالت‌های اکسترمم را مشخص می‌کند. بااین‌حال، با تعریف شرط دوم به صورت زیر ، حالت کمینه ما مشخص خواهد شد:

$$\sigma_p = \sum_j^d r_j \left|\varepsilon_j\right\rangle\left\langle\varepsilon_j\right| \rightarrow r_{j+1} \le r_j$$
$$H = \sum_j^d \varepsilon_j \left|\varepsilon_j\right\rangle\left\langle\varepsilon_j\right| \rightarrow \varepsilon_{j+1} \ge \varepsilon$$

چنانچه رابطه بالا را در جمله دوم ارگوتروپی جایگذاری کنیم، $\min \mathrm{Tr}(\sigma_p H) = \sum_j r_j \varepsilon_j$ را خواهیم داشت. تعبیر این معادله بدین شکل است که با توجه به معادله ۰، بیشترین انرژی در کمترین احتمال، ضرب خواهد شد و برعکس، کمترین ویژه‌مقدار انرژی در بیشترین احتمال، ضرب خواهد شد .این گزاره همانند این است که باتری طوری تحول یابد که انرژی باتری را به حداقل رسیده و بیشترین کار را می توانیم استخراج کنیم. فهم حالت‌های منفعل از اهمیت بسزایی برخوردار است چراکه می‌توان حالت‌هایی را که (به اصطلاح) باتری خالی است، تعریف نمود. هنگامی باتری در یک حالت منفعل قرار می‌گیرد، به این معناست که باتری خالی شده و درنتیجه نمی‌توان از آن، کار استخراج کرد. در مقابل حالت‌های منفعل، حالت‌های فعال وجود دارند که می‌توان از این حالت‌ها کار استخراج کرد (بایندر و همکاران، ۲۰۱۵).

محدودیت استخراج کار

در این قسمت سعی می‌کنیم یک حد بالا و حد پایین جهت حداکثر کار قابل استخراج ارائه دهیم تا چهارچوب‌بندی ما کامل‌تر شود. این کار را با مقایسه انرژی دو حالت منفعل σ_p و حالت گیبس کانونیک ω_β که آنتروپی آن‌ها با $\hat{\rho}$ برابر است، انجام می‌دهیم. ماتریس چگالی یک حالت گیبس کانونیک به شکل زیر داده می‌شود:

$$\omega_\beta = \frac{\exp(-\beta H)}{Z}$$

که در آن، $\beta = \frac{1}{KT}$ است که K، ثابت بولتزمان و T، دما برحسب درجه کلوین است. همچنین، $Z = \mathrm{Tr}(\exp(-\beta H))$ است که همان تابع پارش سامانه است. برای هر ماتریس چگالی ρ که بر روی فضای هیلبرت سامانه کوانتومی مشخصی تعریف شود، یک دما یا همان β منحصربه‌فردی وجود دارد که $S(\rho) = S(\omega_\beta)$ است. باید توجه داشت که رابطه بین ρ و β کاملاً خطی است.

بر اساس اصل وردشی مکانیک آماری، ماتریس چگالی حالت گیبس کانونیک، انرژی آزاد را که به‌صورت $F = U_{(\rho)} - TS_{(\rho)}$ تعریف می‌شود، کمینه می‌کند(آلیسکی و فانس، ۲۰۱۳):

$$Tr(\rho H) - TS(\rho) \geq Tr(\omega_\beta H) - TS(\omega_\beta)$$

بر اساس اینکه $S(\rho) = S(\omega_\beta)$ است، به‌صورت کلی خواهیم داشت:

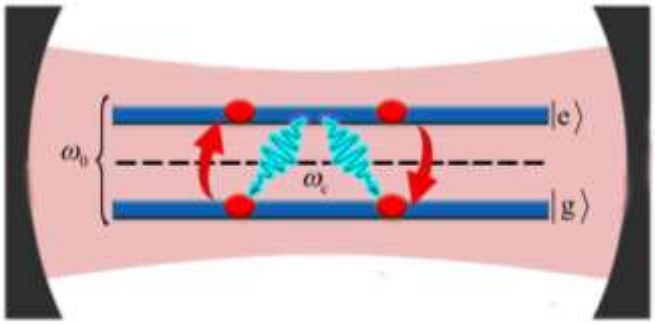
$$Tr(\rho H) \geq Tr(\sigma_p H) \geq Tr(\omega_\beta H)$$

که با توجه به رابطه بالا می‌توانیم حد بالایی را برای حداکثر کار قابل استخراج از یک سامانه کوانتومی تعریف کنیم:

$$W_{max} \leq Tr(\rho H) - Tr(\omega_\beta H)$$

مثال باتری کوانتومی

در این بخش می‌خواهیم یک مثال از باتری کوانتومی بسته را ارائه دهیم. در این مثال، ما باتری را یک سامانه دو ترازه در نظر می‌گیریم که با ثابت λ به یک کاواک جفت شده است(دلمونته و همکاران، ۲۰۲۱). این سامانه را می‌توان در حالت گسترده تر نیز به شکل nتایی نیز در نظر گرفت تا به‌صورت موازی شارژ شوند. در این مدل، اتم دو ترازه ما همانند باتری عمل کرده که با جذب ذو فوتون شارژ شده، و کاواک حکم شارژر را دارد. به دلیل اینکه در اینجا با برهم‌کنش ذره و ماده سروکار داریم؛ بنابراین، می‌توانیم از مدل جینز-کامینگز برای توصیف این سامانه استفاده کنیم.



شکل ۲: نمایی از یک اتم دو ترازه که در داخل یک کاواک قرار گرفته است. در اینجا اتم دو ترازه باتری بوده و کاواک شارژر می باشد.

بنابراین هامیلتونی که می تواند که سامانه را توصیف کند به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \frac{\omega_a}{2}\sigma_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \theta(t)\lambda(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2\sigma_x$$

که در آن، $\hat{a}^\dagger$ و $\hat{a}$ عملگرهای خلق و فنای بوزونی و همچنین، σ_x و σ_z عملگرهای پائولی هستند. در ادامه نیز ω_c و ω_a به ترتیب فرکانس‌های کاواک و اتم هستند. باید به این نکته توجه داشت که ضریب $\theta(t)$ همانند یک تابع پله‌ای است، به این صورت که در $t < 0$ مقدار آن برابر صفر خواهد بود و فرایند برهم‌کنش ماده و نور متوقف می‌شود اما در زمان $t \geq 0$ سازوکار برهم‌کنش نور و ماده وصل شده و مقدار آن برابر یک خواهد شد.

حال با استفاده از تقریب موج چرخان، معادله **Error! Reference source not found.** را باز کرده و جملاتی را که احتمالات بسیار کمی دارند، در طول محاسبات حذف خواهیم کرد. در ابتدا نیز این حد را در نظر می‌گیریم که ثابت

جفت‌شدگی بین اتم و کاواک بسیار کوچک‌تر از فرکانس‌های اتمی و کاواک باشد. با در نظر گرفتن همه گزاره‌های بالا، هامیلتونی سامانه برابر خواهد بود با:

$$H = \frac{\omega_a}{2}\sigma_z + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \theta(t)\lambda(\sigma_- \hat{a}^{\dagger 2} + \sigma_+ \hat{a}^2)$$

در این معادله، قسمت اول مربوط به هامیلتونی باتری، قسمت دوم مربوط به کاواک و قسمت سوم نیز بیانگر برهم‌کنش بین اتم و کاواک است. در معادله بالا نیز $\sigma_\pm$ برابر است با:

$$\sigma_\pm = \frac{\sigma_x \pm i\,\sigma_y}{2}$$

در ادامه بر روی حالتی تمرکز خواهیم کرد که اتم و کاواک در حالت رزونانس باشند؛ یعنی $\omega_a = 2\omega_c$ باشد. در این حالت، تمام انرژی مربوط به دو فوتون می‌تواند به اتم انتقال پیدا کند. این شرط باعث می‌شود که باتری با بهترین حالت خود کار کند.

در ابتدا فرض می‌کنیم باتری و شارژر در حالت ضربی باشد، به این معنا که در ابتدا درهم‌تنیدگی بین باتری و شارژر وجود ندارد. با این شرایط می‌توانیم حالت اولیه را در زمان $t = 0$ به‌صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi(0)\rangle = |g\rangle \otimes \sum_n \alpha_n |n\rangle$$

قسمت اول معادله بالا، بیانگر حالت باتری است درحالی‌که قسمت دوم نشان‌دهنده حالت شارژر است. به بیان دیگر، فضای هیلبرت سامانه متشکل از باتری و شارژر را به‌صورت $I_s = I_B \otimes I_C$ در نظر گرفته‌ایم.

حال، وقتی می‌خواهیم پارامترهای مهم ازجمله ارگوتروپی، توان شارژ، افت‌وخیز انرژی ذخیره‌شده و ... را به دست آوریم، می‌توانیم کاواک را در حالات مختلف عددی[۱]، همدوس[۲] و چلانده[۳] در نظر بگیریم که بررسی این حالت‌ها برای به دست آوردن پارامترهای ذکرشده می‌تواند نتایج جالبی را به همراه داشته باشد.

در معادله ۰، α_n دامنه احتمالات است که برای هر یک از حالت‌های مختلف کاواک متفاوت خواهد بود. دامنه احتمال برای هر سه حالت گفته‌شده برابر است با(لودن،۲۰۰۰):

$$\alpha_n^{(F)} = \delta_{n,N},$$

$$\alpha_n^{(C)} = e^{-\frac{N}{2}} \frac{N^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}},$$

$$\alpha_n^{(S)} = \frac{1}{(N+1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{n!}}{\frac{n}{2}!} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{N+1}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

در رابطه بالا تاکید می شود که N برای حالت عددی تعداد دقیق فوتون های درون کاواک می باشد. این در حالی است که برای دو حالت دیگر میانگین تعداد فوتون های داخل کاواک می باشد. در این قسمت برای آنکه بهره‌وری باتری را مورد

---

۱ Fock
۲ Coherent
۳ Squeezed

بررسی قرار دهیم، باید تحول زمانی را آن را محاسبه کنیم. برای این کار، هامیلتونی سامانه را به صورت ماتریسی و در پایه های فضای هیلبرت سامانه می نویسیم. با در نظر گرفتن پایه های فضا به صورت $|g\rangle|n\rangle$ و $|e\rangle|n-2\rangle$ ، می توانیم فرم ماتریسی هامیلتونی سامانه را به صورت زیر بنویسیم:

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_a}{2}(n-1) & \lambda\sqrt{n(n-1)} \\ \lambda\sqrt{n(n-1)} & \frac{\omega_a}{2}(n-1) \end{pmatrix}$$

در این مرحله می‌خواهیم ویژه‌مقادیر و ویژه‌حالت‌های هامیلتونی سامانه را بر اساس ماتریس بالا محاسبه کنیم. هدف از انجام این کار، همان‌گونه که در ابتدای این بخش هم اشاره شد، به دست آوردن تحول سامانه است. برای به دست آوردن ویژه‌مقادیر، مقدار ثابت را از عناصر قطر اصلی کم خواهیم کرد، سپس دترمینان ماتریس را برابر صفر قرار می‌دهیم تا ویژه-مقادیر آن به دست آید. با این کار خواهیم داشت با انجام محاسبات ساده ریاضی، ویژه‌مقادیر به دست خواهند آمد:

$$E_{\pm}^{(n)} = \frac{\omega_a}{2}(n-1) \pm \lambda\sqrt{n(n-1)}$$

همچنین، جهت به دست آوردن ویژه‌بردارهای متناظر با هر ویژه‌مقدار، هر ویژه‌مقدار را در معادله ویژه‌بردار و ویژه‌مقداری قرار می‌دهیم. که با انجام محاسبات برای هر ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار به‌دست‌آمده، خواهیم داشت:

$$|\psi_{\pm}^{(n)}\rangle = \frac{|g\rangle \otimes |n\rangle \pm |e\rangle \otimes |n-2\rangle}{\sqrt{2}}$$

حال در این قسمت می‌توانیم تحول سامانه را مورد بررسی قرار دهیم. در ابتدا هم اشاره شد که در این قسمت با یک باتری کوانتومی بسته روبه‌رو هستیم. در وضعیت کلی، حالت سامانه‌های بسته به‌صورت زیر به‌وسیله عملگرهای یکانی تحول می‌یابند:

$$|\psi_{(t)}\rangle = U_{(t,t_0)}|\psi_{(t_0)}\rangle$$

به شرط آنکه هامیلتونی معرف سامانه مستقل از زمان باشد و با خودش جابه‌جا شود، عملگر تحول زمانی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$U_{(t,t_0)} = e^{-iHt}$$

همان‌طور که در معادله ۰ حالت اولیه سامانه را تعریف کردیم، می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بر حسب پایه‌های انرژی نوشته و سپس عملگر تحول زمانی را روی آن اثر دهیم:

$$|\psi_t\rangle = U_{(t,0)}|\psi_{(0)}\rangle = \sum_n \alpha_n \frac{(e^{-iE_+^{(n)}t}|\psi_+^{(n)}\rangle + e^{-iE_-^{(n)}t}|\psi_-^{(n)}\rangle)}{\sqrt{2}}$$

و درنهایت با جایگذاری ویژه مقادیر متناظر با هر ویژه بردار که در رابطه ۰ بدست آوردیم، خواهیم داشت:

$$|\psi_{(t)}\rangle = \sum_n \alpha_n e^{-i\frac{\omega_a}{2}(n-1)t} \frac{(e^{-i\lambda\sqrt{n(n-1)}t}|\psi_+^{(n)}\rangle + e^{i\lambda\sqrt{n(n-1)}t}|\psi_-^{(n)}\rangle)}{\sqrt{2}}$$

انرژی ذخیره شده در باتری

در این مرحله از محاسبات می‌خواهیم انرژی ذخیره‌شده در باتری را به دست آوریم. به‌صورت کلی، برای به دست آوردن انرژی ذخیره‌شده در باتری از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد:

$$E(t)=[\langle\Psi(t)|H_{QB}|\Psi(t)\rangle-\langle\Psi(0)|H_{QB}|\Psi(0)\rangle]$$

در رابطه بالا، $H_{QB}=\frac{\omega_a}{2}\sigma_z$ است که برای جملات اول و دوم خواهیم داشت:

$$\langle\Psi(0)|H_{QB}|\Psi(0)\rangle=-\frac{\omega_a}{2}\sum_n \alpha^2{}_n$$

$$\langle\Psi(t)|H_{QB}|\Psi(t)\rangle=\frac{\omega_a}{2}\sum_n \alpha^2{}_n\frac{1}{2}(-1+1-1+1+e^{2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t}(-1-1)+e^{-2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t}(-1-1))$$

$$=-\frac{\omega_a}{2}\sum_n \alpha^2{}_n\frac{(e^{2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t}+e^{-2i\lambda\sqrt{n(n-1)}t})}{2}=-\frac{\omega_a}{2}\sum_n \alpha^2{}_n\cos(2\lambda\sqrt{n(n-1)}\ t)$$

حال اگر دو جمله بالا را با هم جمع کنیم، رابطه نهایی را به شکل زیر برای انرژی ذخیره‌شده در باتری به دست خواهیم آورد:

$$E(t)=\omega_a\sum_n P_n\sin^2(\lambda\sqrt{n(n-1)}t)$$

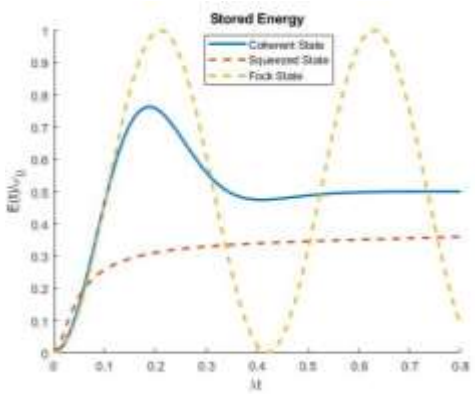
نکته‌ای که در باتری‌های کوانتومی اهمیت دارد، این است که بتوان در کوتاه‌ترین زمان، حداکثر انرژی را ذخیره کرد. بااین‌حال، می‌توان حداقل زمان لازم جهت شارژ کامل باتری را در حالت عددی، وقتی‌که $\alpha_n^{(F)}=\delta_{n,N}$ است، به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\sin^2(i\lambda\sqrt{n(n-1)}t)=1$$

در این صورت، رابطه تنها در شرایطی برقرار خواهد بود که $\lambda\sqrt{n(n-1)}t_E=(k+\frac{1}{2})\pi$ باشد. در این حالت، برای زمان t_E که همان حداقل زمان لازم برای رسیدن به شارژ حداکثری است، خواهیم داشت:

$$t_E=\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\lambda\sqrt{n(n-1)}}$$

در نمودار زیر در حالتی که $N=8$ است، رفتار انرژی ذخیره‌شده در باتری را نسبت به فرکانس اتمی ω_a و در سه حالت مختلف بیان‌شده بررسی می‌کنیم.



نمودار ۱: مقایسه انرژی ذخیره شده در باتری در سه حالت مختلف عددی، همدوس و چلانده

طبق نمودار بالا، حالت کامل شارژ تنها در شرایطی امکان‌پذیر است که حالت کاواک به‌صورت عددی باشد. در مقابل، حالت همدوس با همان مقدار متوسط تعداد فوتون‌ها می‌تواند به‌صورت نسبی نیز به انرژی قابل‌قبولی دست پیدا کند اما درنهایت حالت چلانده نتوانسته نسبت به بقیه حالت‌ها برتری پیدا نموده و از همه آن‌ها وضعیت بدتری در ذخیره کردن انرژی دارد. با این حال، از دو مورد دیگر می توانیم پایداری بهتری را مشاهده کنیم.

در مورد تحلیل نمودار بالا نیز می‌توانیم زمان شارژ باتری در هر سه حالت را بررسی کنیم. زمانی که باتری در دو حالت همدوس و عددی قرار گرفته، مدت‌زمان شارژ آن‌ها را می‌توان همراه با حالت چلانده بررسی کرد. از معادله ۰ برای حالت عددی $\lambda t_E^F \approx 0.21$ و همچنین، برای حالت همدوس این مقدار برابر با $\lambda t_E^C \approx 0.19$ به دست خواهد آمد. در مقابل، در حالت اسکوییزد، مدت‌زمانی که باتری می‌تواند به حداکثر شارژ ممکن خود برسد، بیشتر از $\lambda t_E^s \approx 1.53$ خواهد بود.

از بحث بالا می‌توانیم به این نتیجه برسیم که حالت عددی، بهترین گزینه برای حالت اولیه کاواک است. در مقابل، حالت اسکوییزد را داریم که چه از نظر مدت‌زمان شارژ و چه از نظر میزان شارژ قابل‌ذخیره در باتری از همه حالت‌های دیگر وضعیت بدتری را دارد.

توان شارژ باتری دو فوتونه

در این قسمت توان شارژ باتری را باز در همان سه حالت یاد شده، بررسی می کنیم. همانگونه که گفته شد، توان شارژ در واقع، مشخص می کند که یک باتری چقدر می تواند سریع شارژ و یا تخلیه شود. بدین صورت که:

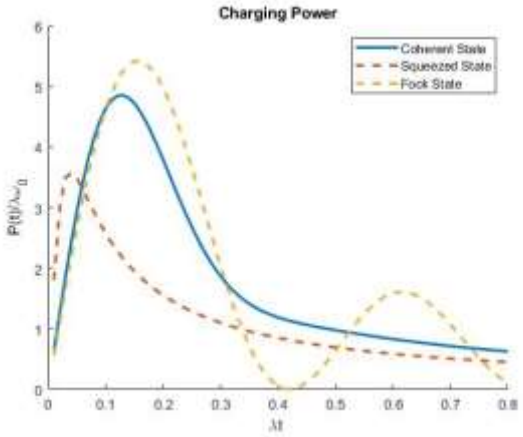
$$P(t) = \frac{E(t)}{t}$$

بر اساس اظهار نظر بالا درمورد توان شارژ، حداکثر این مقدار مد نظر می باشد. یعنی به اینصورت که:

$$\max_t [P(t)] \equiv P(t_p)$$

که در بالا t_p نشان دهنده مقدار زمانی است که باتری به حداکثر توان خود رسیده است.

در نمودار زیر، ما $P(t_p)$ را برای سه حالت مشخص شده بررسی خواهیم کرد. همانطور که نمودار نشان می دهد، در ابتدا می توانید به این نتیجه برسید که کاواک وقتی در حالت عددی قرار گرفته باشد می تواند به حداکثر توان شارژ خود دست یابد و به ترتیب هم همانند انرژی ذخیره شده در باتری، وقتی کاواک در حالت همدوس باشد، توان شارژ آن کمتر از حالت قبل و برای حالت چلانده هم کمتر از حالت همدوس، خواهد بود.



نمودار ۲: مقایسه توان شارژ باتری در سه حالت مختلف عددی، همدوس و چلانده

ارگوتروپی باتری دو فوتونه

یکی دیگر از سنجه‌های مهم برای تعیین بهره‌وری باتری، ارگوتروپی است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، ارگوتروپی یا حداکثر کار قابل استخراج از یک فرایند چرخه‌ای یکانی است. باید به این نکته توجه داشت که مقدار این کمیت با مقدار انرژی ذخیره‌شده در باتری متفاوت است زیرا مقداری از انرژی ذخیره‌شده ممکن است در همبستگی های بین شارژر و باتری ذخیره‌شده باشد که قابل استخراج نیست. ما می‌توانیم رابطه حاصل در قسمت ارگوتروپی را جهت حل این مسئله به‌صورت مؤثر، به شکلی دیگر نیز بنویسیم. اگر فرض کنیم که تجزیه طیفی هامیلتونی سامانه کوانتومی ما به‌صورت:

$$H_{QB} = \sum_{j,k} \varepsilon_k \left|\varepsilon_k\right\rangle\left\langle\varepsilon_k\right|$$

$$\rho_{TLS} = \sum_{j,k} r_j(t)\left|r_j(t)\right\rangle\left\langle r_j(t)\right|$$

که در آن ویژه‌مقادیر انرژی به‌صورت $\varepsilon_k < \varepsilon_{k+1}$ متناسب با هر ویژه‌بردار $\left|\varepsilon_k\right\rangle$ و همچنین، ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی نیز به‌صورت $r_j > r_{j+1}$ متناظر با هر ویژه‌بردار $\left|r_j(t)\right\rangle$ باشد، حال، با جایگذاری در معادله ۰، می‌توانیم به رابطه زیر جهت محاسبه ارگوتروپی دست پیدا کنیم:

$$\varepsilon_{(t)} = \sum_{j,k} r_j(t)\varepsilon_k\left(\left|\left\langle r_j(t)\middle|\varepsilon_k\right\rangle\right|^2 - \delta_{i,j}\right)$$

در بخش تعیین حداکثر کار قابل استخراج از باتری مطرح شد که این اتفاق زمانی خواهد افتاد که حالت پایانی سامانه، حالت تعادل گرمایی باشد:

$$W_{max} \le Tr(\rho H) - Tr(\omega_\beta H)$$

حال به خاطر اینکه مقدار رابطه ۰ را بررسی کنیم، باید ماتریس مربوط به هامیلتونی و ماتریس چگالی آن را قطری نماییم. مشکل موجود این است که ماتریس چگالی به‌دست‌آمده بر حسب کل سامانه متشکل از باتری و شارژر بود. اما ما برای انجام محاسبات فقط ماتریس چگالی باتری را نیاز داریم. به همین خاطر می‌توانیم ماتریس چگالی کاهش‌یافته سامانه را با استفاده از تریس جزئی به دست آوریم:

$$\rho_{TLS} = Tr_C(\rho)$$

درنهایت، با انجام محاسبات جبری می‌توانیم به رابطه زیر برای ماتریس چگالی باتری بر حسب پایه‌های فضای هیلبرت دست پیدا کنیم:

$$\rho_{TLS} = \sum_n P_n[(\cos^2 \lambda\sqrt{n(n-1)}t)|g\rangle\langle g| + (\sin^2 \lambda\sqrt{n(n-1)}t)|e\rangle\langle e|]$$
$$+e^{i\omega_a t}[(i\sqrt{P_{n+2}P_n}\sin\lambda\sqrt{(n+1)(n+2)}t.\cos\lambda\sqrt{n(n-1)}t)]|g\rangle\langle e|$$
$$-e^{-i\omega_a t}[(i\sqrt{P_{n+2}P_n}\sin\lambda\sqrt{(n+1)(n+2)}t.\cos\lambda\sqrt{n(n-1)}t)]|e\rangle\langle g|]$$

که ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی بالا برابر خواهند بود با:

$$\widehat{r}_s(t) = \frac{1+(-1)^s\sqrt{1-4\det(\rho_{TLS}(t))}}{2}$$

چون در اینجا ما باتری را یک اتم دو ترازه فرض کرده‌ایم که هامیلتونی آن برابر $H_{QB} = \frac{\omega_a}{2}\sigma_z$ است؛ بنابراین،

$$E_{\pm} = \pm\frac{\omega_0}{2}$$

به‌راحتی ویژه‌مقادیر این هامیلتونی نیز که برابر با هستند، به دست خواهد آمد. حال اگر ویژه‌مقادیر به‌دست‌آمده از ماتریس چگالی و هامیلتونی باتری را در رابطه ۰ جایگذاری کنیم، می‌توانیم به مقدار ارگوتروپی زیر دست پیدا کنیم:

$$\varepsilon_{(t)} = E(t) - \frac{\omega_a}{2}\sqrt{1-4\det(\rho_{TLS}(t))}$$

بحث و نتیجه‌گیری

منابع ذخیره‌سازی انرژی همواره عضو جدایی ناپذیر از زندگی انسان ها بوده‌اند. ما در طول روز با لوازمی در ارتباط هستیم که در ساخت آنها حداقل یک باتری برای ذخیره‌سازی اطلاعات استفاده شده است. این باتری‌ها بر اساس فرایندهای الکتروشیمیایی، شارژ و یا تخلیه می‌شوند و در ابعاد ماکروسکوپیک ساخته می‌شوند. اما اگر این ایزار مهم را به صورت میکروسکوپیک در نظر بگیریم، آیا دانش قبلی ما در مورد باتری های عادی می تواند در مطالعه آن ها مفید واقع شود؟ جواب خیر است. چراکه وقتی به ابعاد اتم سفر می کنیم، فیزیک کلاسیک نمی‌تواند تحول سامانه را به درسی بررسی کند و محکوم به شکست است و مکانیک کوانتومی جای خود را به فیزیک کلاسیک می دهد. در این مقاله سعی کردیم مفاهیم پایه‌ای مربوط به مطالعه باتری های کوانتومی بسته را که در طول مسیر می خواستیم از آنها استفاده کنیم، به طور خلاصه شرح دادیم. سپس در قدم بعدجهت واضح شدن توضیحات نیز یک مثال برای مطالعه باتری‌های کوانتومی بسته، ارائه دادیم. در این مثال، فرایند شارژ و تخلیه یک باتری کوانتومی دو ترازه در سه حالت مختلف شارژ مورد بررسی قرار داده شد. در نهایت با توجه به محاسبات انجام داده شده به این نتیجه رسیدیم که کاواکی که باتری کوانتومی در آن واقع شده بود، اگر در حالت همدوس قرار داشته باشد می تواند کاندیدای بهتری از نظر پایداری و میزان انرژی که می تواند در باتری ذخیره کند، باشد. هرچند این انرژی ذخیره شده از حالت عددی کمتر است اما از پایداری بهتری نسبت به حالت عدد برخوردار است. و در نهایت در حالت چلانده، با وجود پایداری نسبتا خوب نمی تواند گزینه مناسبی جهت شارژ باتری از نظر میزان انرژی ذخیره شده باشد.

منابع

Alicki, R., & Fannes, M. (۲۰۱۳). Entanglement boost for extractable work from ensembles of quantum batteries. *Physical Review E*, ۸۷(٤), ۰٤۲۱۲۳.

Allahverdyan, A. E., Balian, R., & Nieuwenhuizen, T. M. (۲۰۰٤). Maximal work extraction from finite quantum systems. *EPL (Europhysics Letters)*, ٦۷(٤), ٥٦٥.

Binder, F. C., Vinjanampathy, S., Modi, K., & Goold, J. (۲۰۱٥). Quantacell: powerful charging of quantum batteries. *New Journal of Physics*, ۱۷(۷), ۰۷٥۰۱٥.

Breuer, H.-P. (۲۰۱۲). Foundations and measures of quantum non-Markovianity. Journal of Physics B: Atomic, *Molecular and Optical Physics*, ٤٥(۱٥), ۱٥٤۰۰۱.

Breuer, H.-P., & Petruccione, F. (۲۰۰۲). *The theory of open quantum systems*: Oxford University Press on Demand.

Deffner, S., & Campbell, S. (۲۰۱۷). Quantum speed limits: from Heisenberg's uncertainty principle to optimal quantum control. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, ٥۰(٤٥), ٤٥۳۰۰۱.

Delmonte, A., Crescente, A., Carrega, M., Ferraro, D., & Sassetti, M. (۲۰۲۱). Characterization of a Two-Photon Quantum Battery: Initial Conditions, Stability and Work Extraction. *Entropy*, ۲۳(٥), ٦۱۲.

Gemme, G., Grossi, M., Ferraro, D., Vallecorsa, S., & Sassetti, M. (۲۰۲۲). IBM quantum platforms: a quantum battery perspective. *Batteries*, ۸(٥), ٤۳.

Giovannetti, V., Lloyd, S., & Maccone, L. (۲۰۰۳). The role of entanglement in dynamical evolution. *EPL (Europhysics Letters)*, ٦۲(٥), ٦۱٥.

Kamin, F., Tabesh, F., Salimi, S., Kheirandish, F., & Santos, A. C. (۲۰۲۰). Non-Markovian effects on charging and self-discharging process of quantum batteries. *New Journal of Physics*, ۲۲(۸), ۰۸۳۰۰۷.

Šimić, Z., Topić, D., Knežević, G., & Pelin, D. (۲۰۲۱). Battery energy storage technologies overview. *International journal of electrical and computer engineering systems*, ۱۲(۱), ٥۳-٦٥.

R. Loudon, The quantum theory of light, OUP Oxford۲۰۰۰.