Vol. 6, No. 2, Summer 2026, pp 1- 20

Journal of Research in Mathematics Education

ORIGINAL RESEARCH PAPER

From Mathematical Thinking to Mathematics Teaching: Designing an Approach to Link Thinking Processes with Teaching Methods

Hamidreza Kashefi [*1]

[1] *Department of Mathematics Education, Farhangian University P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran.*

Keywords
Process Standards
Mathematical Thinking
Problem Solving
Mathematics Teaching
Methods

1 .Corresponding author
hkashefi@cfu.ac.ir

Received: 2025/11/19
Accepted: 2026/01/20

ABSTRACT

Background and Objectives: The purpose of this theoretical-applied research is to elucidate the relationship between mathematical thinking processes and teaching methods, and to present an educational framework for reinforcing the five Process Standards of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) in the classroom. Mathematical thinking in this article is defined based on the standards of Problem Solving, Connections, Reasoning & Proof, Communication, and Representation, which form the foundation for deep learning of the Content Standards. **Methods:** The present study employed documentary and content analysis to identify and match appropriate teaching methods with each standard. **Findings:** Based on the findings, the three approaches to problem solving (teaching about, via, and for problem solving) were proposed to strengthen the key Problem Solving standard. Additionally, Socratic Dialogue and Collabraitive Learning were identified as effective for the Reasoning and Proof and Communication standards, Concept Mapping and Advance Organizers for Connections, and Demonstration Teaching for effective Representation. **Conclusion:** The results show that the conscious selection of teaching methods not only reinforces each of these standards and processes individually but also, due to the inherent interconnectedness of these standards, leads to an overall enhancement of students' mathematical thinking and meaningful learning of mathematical content.

ISSN (Online): 2783- 4379 **DOI:** 10.48310/rme.2026.21563.1133

Citation (APA): Kashefi, H .(2026). From Mathematical Thinking to Mathematics Teaching: Designing an Approach to Link Thinking Processes with Teaching Methods. *Research in Mathematics Education*, 6 (2), 1- 20 .
https://doi.org/10.48310/rme.2026.21563.1133

از تفکر ریاضی تا تدریس ریاضی:
طراحی رویکردی برای پیوند فرایندهای تفکر با روش‌های تدریس

مقاله پژوهشی/ مروری

حمیدرضا کاشفی*[۱]

۱ گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵ تهران، ایران.

چکیده

پیشینه و اهداف: هدف این پژوهش نظری-کاربردی، تبیین نسبت میان فرایندهای تفکر ریاضی و روش‌های تدریس و ارائه‌ی چارچوبی برای تقویت استانداردهای فرایندی پنج‌گانه‌ی شورای ملی معلمان ریاضی[۱] در کلاس درس است. تفکر ریاضی در این مقاله، بر اساس استانداردهای حل مسئله، پیوند و ارتباطات، استدلال و اثبات، گفتمان و بازنمایی تعریف می‌شود که زیربنای یادگیری عمیق استانداردهای محتوایی را تشکیل می‌دهند. **روش‌ها:** پژوهش حاضر از طریق تحلیل اسنادی و محتوایی، به شناسایی و تطبیق روش‌های تدریس متناسب با هر استاندارد پرداخته است. **یافته‌ها:** بر اساس یافته‌ها، رویکردهای سه‌گانه حل مسئله (درباره، از طریق، و به‌وسیله‌ی حل مسئله) برای تقویت استاندارد کلیدی حل مسئله پیشنهاد شدند و همچنین، گفت‌وگوی سقراطی و یادگیری مشارکتی برای استانداردهای استدلال و اثبات و گفتمان، نقشه‌ی مفهومی و پیش‌سازمان‌دهنده‌ها برای پیوند و ارتباطات، و تدریس نمایشی برای بازنمایی مؤثر تشخیص داده شدند. **نتیجه‌گیری:** نتایج نشان می‌دهد که انتخاب آگاهانه‌ی روش‌های تدریس، نه تنها به‌طور مجزا هر یک از این استانداردها و فرایندها را تقویت می‌کند، بلکه به دلیل درهم‌تنیدگی ذاتی این استانداردها، منجر به ارتقای کلی تفکر ریاضی دانش‌آموزان و یادگیری معنادار محتوای ریاضی می‌شود.

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید.

واژه‌های کلیدی

استانداردهای فرایندی

تفکر ریاضی

حل مسئله

روش‌های تدریس ریاضیات

۱. نویسنده مسئول

hkashefi@cfu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۸/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۳۰

شماره صفحات: ۲۰- ۱

شاپا الکترونیکی: ۴۳۷۹- ۲۷۸۳

DOI: 10.48310/rme.2026.21563.1133

OPYRIGHTS

©2026 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

[1] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

مقدمه

تفکر ریاضی مهارتی بنیادین است که فراتر از انجام محاسبات یا حفظ رویه‌های الگوریتمی قرار می‌گیرد و مستلزم درک عمیق مفاهیم و به‌کارگیری آگاهانه اصول ریاضی است. این نوع تفکر به فرد امکان می‌دهد با مفاهیم انتزاعی مواجه شود، از استدلال منطقی بهره گیرد و به حل مسائل پیچیده بپردازد. اهمیت تفکر ریاضی تنها به یادگیری موفق در حوزه ریاضیات محدود نمی‌شود، بلکه در زندگی روزمره، فعالیت‌های پژوهشی و طیف گسترده‌ای از حوزه‌های حرفه‌ای نیز نقشی تعیین‌کننده دارد. در همین راستا، استیسی (۲۰۰۶) سه کارکرد اساسی برای تفکر ریاضی برمی‌شمارد: نخست، به‌عنوان یکی از اهداف محوری نظام‌های آموزشی؛ دوم، به‌عنوان رویکردی برای یادگیری عمیق‌تر ریاضیات؛ و سوم، به‌عنوان مؤلفه‌ای کلیدی در فرایند تدریس این دانش. با وجود اجماع گسترده در خصوص اهمیت تفکر ریاضی، ادبیات پژوهشی فاقد تعریفی واحد و جامع از این مفهوم است (Drijvers et al., 2019). با این حال، برخی پژوهشگران، از جمله واتسون (۲۰۰۱) و ایسیودا (۲۰۱۲)، با بررسی تعاریف موجود، دو رویکرد غالب را در تبیین تفکر ریاضی شناسایی کرده‌اند: رویکرد نخست بر راهبردهای حل مسئله و فرایندهای ریاضی تأکید دارد، در حالی‌که رویکرد دوم بر رشد و تعمیق درک مفهومی متمرکز است. این دو رویکرد نه‌تنها در تقابل با یکدیگر نیستند، بلکه در ترکیب با هم می‌توانند چارچوبی جامع‌تر برای فهم تفکر ریاضی فراهم آورند.

برخی پژوهشگران مانند گوس و همکاران (۲۰۲۰)، برتون (۱۹۸۴)، استیسی (۲۰۰۶) و بال و همکاران (۲۰۲۰) بر این نکته تأکید دارند که تفکر ریاضی، بیش از آن‌که معطوف به محتوا باشد، بر فرایندهای ریاضی تمرکز دارد. به‌طور مشخص، برتون (۱۹۸۴) تفکر ریاضی را در قالب عملیات، فرایندها و پویایی‌های حاکم بر اندیشه ریاضی تعریف می‌کند. هم‌سو با این دیدگاه، شماری از محققان بر آن‌اند که فرایندهای ریاضی نه‌تنها با تفکر ریاضی ارتباطی مستقیم دارند، بلکه هسته مرکزی آن را نیز تشکیل می‌دهند (Bal & Dinç Artut, 2020; Stacey, 2006). در میان چارچوب‌های ارائه‌شده برای تبیین تفکر ریاضی، استانداردهای فرایندی شورای ملی معلمان ریاضیات (NCTM) به‌عنوان یکی از جامع‌ترین الگوها شناخته می‌شوند، زیرا مجموعه‌ای از فرایندهایی را در بر می‌گیرند که در سایر چارچوب‌ها نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند (Gonzales et al., 2023) . بر این اساس، می‌توان تفکر ریاضی را توانایی به‌کارگیری این استانداردهای فرایندی در موقعیت‌ها و حوزه‌های گوناگون دانست. مطابق با استانداردهای NCTM، تفکر ریاضی مشتمل بر فرایندهایی چون حل مسئله، برقراری ارتباط و پیوند، استدلال و اثبات، گفتمان، و بازنمایی است (جدول ۱).

نخستین مؤلفه در استانداردهای فرایندی شورای ملی معلمان ریاضیات (NCTM)، حل مسئله است. بر اساس NCTM (۲۰۰۰)، حل مسئله نه‌تنها به‌عنوان هدفی اساسی در آموزش ریاضیات مطرح می‌شود، بلکه به‌مثابه روشی برای یادگیری نیز عمل می‌کند؛ به‌گونه‌ای که امکان تلفیق و به‌کارگیری هم‌زمان مفاهیم و ایده‌های گوناگون ریاضی را فراهم می‌سازد (Tarim & Ökten, 2014). دومین استاندارد فرایندی به پیوند و ارتباطات اختصاص دارد که ناظر بر برقراری ارتباط میان ایده‌ها و مفاهیم مختلف ریاضی است. به بیان الی و همکاران (۲۰۱۳)، این مؤلفه به شبکه‌ای از ارتباطات مفهومی اشاره دارد که درک عمیق‌تر ریاضیات را تسهیل می‌کند. در ادامه، استاندارد استدلال و اثبات قرار دارد که بر پرورش توانایی دانش‌آموزان در تولید، تحلیل و ارزیابی گزاره‌های ریاضی تأکید دارد. این فرایند مستلزم انجام فعالیت‌هایی نظیر حدس‌ورزی، تعمیم (Vale et al., 2017) و نیز ارائه توجیه و تبیین منطقی برای گزاره است (Mata-Pereira & Ponte, 2017). چهارمین مؤلفه، گفتمان ریاضی است؛ فرایندی که طی آن یادگیرندگان با بیان، تبادل و بازاندیشی ایده‌های خود، فهم ریاضی‌شان را آشکار و تعمیق می‌بخشند (NCTM, 2000). در نهایت، بازنمایی به‌عنوان پنجمین استاندارد، به استفاده از ابزارها و شیوه‌های مختلف برای نمایش مفاهیم و روابط ریاضی اشاره دارد. بال (۲۰۱۴) و کای (۲۰۰۵) این فرایند را شکل‌گیری و سازمان‌دهی مفاهیم ریاضی از طریق تجسم و بهره‌گیری از ابزارهایی مانند تصاویر، اشیای ملموس، جداول، نمودارها و طرح‌ها توصیف کرده‌اند.

جدول ۱. استانداردهای فرایندی ریاضیات به‌منزله فرایندهای تفکر ریاضی

استاندارد	برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستان تا پایان پایه دوازدهم باید به تمامی دانش‌آموزان امکان دهند که:
حل مسئله	• دانش ریاضی جدید را از طریق حل مسئله بسازند. • مسائلی را که در ریاضیات یا در سایر زمینه‌ها پدید می‌آیند، حل کنند. • برای حل مسائل، مجموعه‌ای متنوع از راهبردهای مناسب را به‌کار گیرند و سازگار سازند. • فرایند حل مسئله‌ی ریاضی را پایش کرده و درباره آن تأمل کنند.
پیوند و ارتباطات	• پیوندهای میان ایده‌های ریاضی را تشخیص دهند و به‌کار گیرند. • درک کنند که چگونه ایده‌های ریاضی با یکدیگر در ارتباط‌اند و بر یکدیگر بنا می‌شوند تا یک کل منسجم را شکل دهند. • ریاضیات را در زمینه‌هایی خارج از ریاضیات تشخیص داده و به‌کار گیرند.
استدلال و اثبات	• استدلال و اثبات را به‌عنوان جنبه‌هایی بنیادی از ریاضیات بشناسند. • حدس‌های ریاضی را مطرح کرده و مورد بررسی قرار دهند. • استدلال‌ها و برهان‌های ریاضی را تدوین و ارزیابی کنند. • انواع مختلف استدلال و روش‌های گوناگون اثبات را انتخاب و استفاده کنند.
گفتمان	• تفکر ریاضی خود را از طریق گفتمان سازمان‌دهی و یکپارچه‌سازی کنند. • تفکر ریاضی خود را به‌صورت روشن و منسجم برای همسالان، معلمان و دیگران بیان کنند. • شیوه‌ی تفکر و راهبردهای ریاضی دیگران را تحلیل و ارزیابی نمایند. • از زبان ریاضی برای بیان دقیق ایده‌های ریاضی بهره بگیرند.
بازنمایی	• برای سازمان‌دهی، ثبت و ارتباط ایده‌های ریاضی، بازنمایی‌ها را ایجاد و به‌کار گیرند. • توانایی انتخاب، به‌کارگیری، و تبدیل بازنمایی‌های ریاضی به یکدیگر به منظور حل مسائل را داشته باشند. • از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تفسیر پدیده‌های فیزیکی، اجتماعی و ریاضی بهره بگیرند.

با توجه به مباحث پیش‌گفته، استانداردهای فرایندی شورای ملی معلمان ریاضیات (NCTM) را می‌توان چارچوبی نسبتاً جامع برای تبیین مؤلفه‌های اصلی تفکر ریاضی دانست؛ مؤلفه‌هایی که در بسیاری از الگوهای نظری نیز به‌صورت مشترک مورد توجه قرار گرفته‌اند. بر این مبنا، تفکر ریاضی را می‌توان به‌عنوان توانایی به‌کارگیری این فرایندها در موقعیت‌ها و حوزه‌های گوناگون تعریف کرد. با وجود جایگاه محوری این فرایندها در یادگیری ریاضیات، چالش اساسی در سطح عمل آموزشی آن است که معلمان چگونه می‌توانند زمینه‌های تقویت این توانایی‌ها را در کلاس درس فراهم آورند و آن‌ها را در خدمت یادگیری مفاهیم و استانداردهای محتوایی قرار دهند. به بیان دیگر، مسئله صرفاً شناسایی این فرایندها نیست، بلکه چگونگی تلفیق مؤثر آن‌ها با روش‌های تدریس اهمیت می‌یابد. ازاین‌رو، به نظر می‌رسد شناسایی و تبیین راهبردهای آموزشی متناسب با هر یک از استانداردهای فرایندی ـــ شامل حل مسئله، پیوند و ارتباطات، استدلال و اثبات، گفتمان و بازنمایی ـــ ضرورتی انکارناپذیر است. چنین رویکردی می‌تواند به معلمان کمک کند تا به‌صورت هدفمند به پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان بپردازند و زمینه را برای یادگیری عمیق، معنادار و پایدار مفاهیم ریاضی فراهم سازند. در همین راستا، پژوهش حاضر می‌کوشد با اتکا بر مبانی نظری و شواهد پژوهشی، چارچوبی منسجم برای پیوند میان فرایندهای تفکر ریاضی و روش‌های تدریس ریاضیات ارائه دهد.

روش

روش پژوهش حاضر از حیث هدف، در زمره مطالعات نظری–کاربردی و از نظر ماهیت، کیفی با رویکرد اسنادی–تحلیلی است. بر این اساس، تمرکز اصلی پژوهش بر تحلیل نظام‌مند ادبیات نظری و یافته‌های پژوهشی موجود در حوزه

تفکر ریاضی و آموزش ریاضی قرار دارد. جامعه نظری پژوهش شامل طیفی از منابع معتبر است که از جمله آن‌ها می‌توان به اسناد مرجع بین‌المللی، به‌ویژه استانداردها و گزارش‌های شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM)، آثار کلاسیک در زمینه حل مسئله و تفکر ریاضی (نظیر پولیا، شونفلد، میسن، برتون و استیسی)، پژوهش‌های معاصر مرتبط با استانداردهای فرایندی و نیز مطالعات مربوط به روش‌های تدریس هم‌سو با مؤلفه‌هایی چون حل مسئله، پیوند و ارتباطات، استدلال و اثبات، گفتمان و بازنمایی اشاره کرد. همچنین، اسناد و برنامه‌های درسی ملی در حوزه آموزش ریاضی نیز به‌عنوان بخشی از منابع مورد بررسی قرار گرفته‌اند. انتخاب منابع به‌صورت هدفمند و بر پایه ملاک‌های مشخص انجام شده است؛ به‌گونه‌ای که منابع منتخب به‌طور مستقیم به یکی از محورهای تعریف تفکر ریاضی، تبیین استانداردهای فرایندی NCTM یا تحلیل روش‌های تدریس متناظر با این استانداردها پرداخته باشند.

یافته‌ها: پیوند فرایندهای تفکر ریاضی و روش‌های تدریس

استاندارد حل مسئله

حل مسئله به‌معنای درگیر شدن با موقعیتی است که برای حل‌کننده ناآشنا بوده و فاقد یک روش یا الگوریتم از پیش تعیین‌شده است (Schoenfeld, 1985, 1992). در چنین شرایطی، فرد ناگزیر است با اتکا به دانش پیشین، راهبردهای اکتشافی و فرایندهای استدلالی، مسیر دستیابی به پاسخ را خود سامان دهد. از منظر هالموس (۱۹۸۰)، ماهیت ریاضیات را اساساً مسائل و شیوه‌های حل آن‌ها شکل می‌دهد. بر این اساس، حل مسئله نه‌تنها ابزاری برای به‌کارگیری مفاهیم ریاضی، بلکه بخشی جدایی‌ناپذیر از فرایند یادگیری این دانش محسوب می‌شود. به همین دلیل، حل مسئله جایگاهی محوری در برنامه‌های درسی ریاضیات داشته و به‌عنوان یکی از مؤلفه‌های اصلی آموزش ریاضی در مدارس مورد تأکید قرار می‌گیرد.

بر اساس استاندارد حل مسئله به‌عنوان یکی از پنج استاندارد فرایندی آموزش ریاضیات، برنامه‌های آموزشی از پیش‌دبستان تا پایه‌ی دوازدهم باید به گونه‌ای طراحی و اجرا شوند که دانش‌آموزان را در زمینه‌های زیر توانمند سازند:

- ساخت دانش ریاضی جدید از طریق حل مسئله
- حل مسائل در زمینه ریاضیات و در حوزه های دیگر دانش
- به‌کارگیری و سازگار کردن مجموعه‌ای متنوع از راهبردهای مناسب برای حل مسائل
- پایش و تأمل در فرایند حل مسئله‌ی ریاضی (NCTM, 2000).

امروزه اهمیت حل مسئله در برنامه‌ی درسی آموزش ریاضیات بر کسی پوشیده نیست، اما چالش اصلی آموزشگران و پژوهشگران این است که چگونه حل مسئله را آموزش دهند و مهارت‌های حل مسئله‌ی دانش‌آموزان را تقویت کنند. بر اساس گفته‌ی شرودر و لستر (۱۹۸۹)، سه رویکرد برای آموزش حل مسئله وجود دارد:

- تدریس برای حل مسئله
- تدریس درباره‌ی حل مسئله
- تدریس از طریق حل مسئله

به این سه رویکرد می‌توان تدریس به‌وسیله حل مسئله را نیز افزود (Yudariah et al., 2009; Kashefi, 2021). در بخش‌های بعد این رویکردهای تدریس مبتنی بر حل مسئله توضیح داده می‌شود.

- **تدریس برای حل مسئله**

حامیان این رویکرد بر این باورند که کارکرد اصلی یادگیری ریاضیات، توانایی به‌کارگیری دانش برای حل مسائل است (Rott et al., 2021). از این منظر، هرچند کسب دانش ریاضی اهمیت دارد، اما غایت یادگیری در استفاده مؤثر از این دانش در موقعیت‌های مسئله‌محور تحقق می‌یابد. در چارچوب این نوع تدریس، مفاهیم، فرمول‌ها و روش‌های ریاضی پیش از آن‌که دانش‌آموزان با مسئله‌ای مواجه شوند یا نیازی به آن‌ها احساس کنند، ارائه می‌شود. در نتیجه،

حل مسئله به فعالیتی پسینی تبدیل می‌شود که پس از معرفی مفاهیم جدید یا تمرین مهارت‌های محاسباتی صورت می‌گیرد. هدف از این رویکرد آن است که فرصت به‌کارگیری آموخته‌ها در موقعیت‌های مسئله‌ای برای دانش‌آموزان فراهم شود. با این حال، شواهد نشان می‌دهد که در چنین شرایطی، دانش‌آموزان غالباً راه‌حل‌های ارائه‌شده در مثال‌های حل‌شده را به‌عنوان الگو به کار می‌گیرند و مسائل مشابه را بر همان اساس حل می‌کنند. در این وضعیت، فرایند حل مسئله بیشتر به بازتولید رویه‌ها محدود می‌شود تا درگیر شدن در تفکر ریاضی. ازاین‌رو، هنگامی که مسئله‌ای از الگوهای آشنا فاصله می‌گیرد، بسیاری از دانش‌آموزان در حل آن با دشواری مواجه می‌شوند (Schroeder & Lester, 1989).

- **تدریس درباره حل مسئله**

در این رویکرد، الگوهای حل مسئله، به‌ویژه چارچوب چهارمرحله‌ای پولیا و چارچوب‌های برگرفته از آن، به‌صورت صریح به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود. در حالت مطلوب، این شیوه می‌تواند با تجربه حل مسائل واقعی همراه باشد؛ بااین‌حال، در عمل، اغلب به تبیین مراحل و راهبردهای حل مسئله محدود می‌ماند. برای تبیین دقیق‌تر این رویکرد، ابتدا چارچوب‌های حل مسئله پولیا (۱۹۴۵) و شونفلد (۱۹۸۵) بررسی می‌شوند؛ چارچوب‌هایی که نقش مهمی در تحقق هدف «به‌کارگیری و انطباق مجموعه‌ای متنوع از راهبردهای مناسب برای حل مسئله» ایفا می‌کنند. این چارچوب‌ها بر سازمان‌دهی فرایند حل مسئله و هدایت آگاهانه فعالیت‌های شناختی تأکید دارند. در ادامه، چارچوب ارائه‌شده توسط میسن، برتون و استیسی (۱۹۸۲) معرفی می‌شود که علاوه بر تقویت توانایی حل مسائل در ریاضیات، از سایر اهداف «حل مسائل در زمینه ریاضیات و در حوزه های دیگر دانش» و نیز «پایش و تأمل در فرایند حل مسئله‌ی ریاضی»، از طریق رویکرد آموزش به‌وسیله حل مسئله پشتیبانی می‌کند.

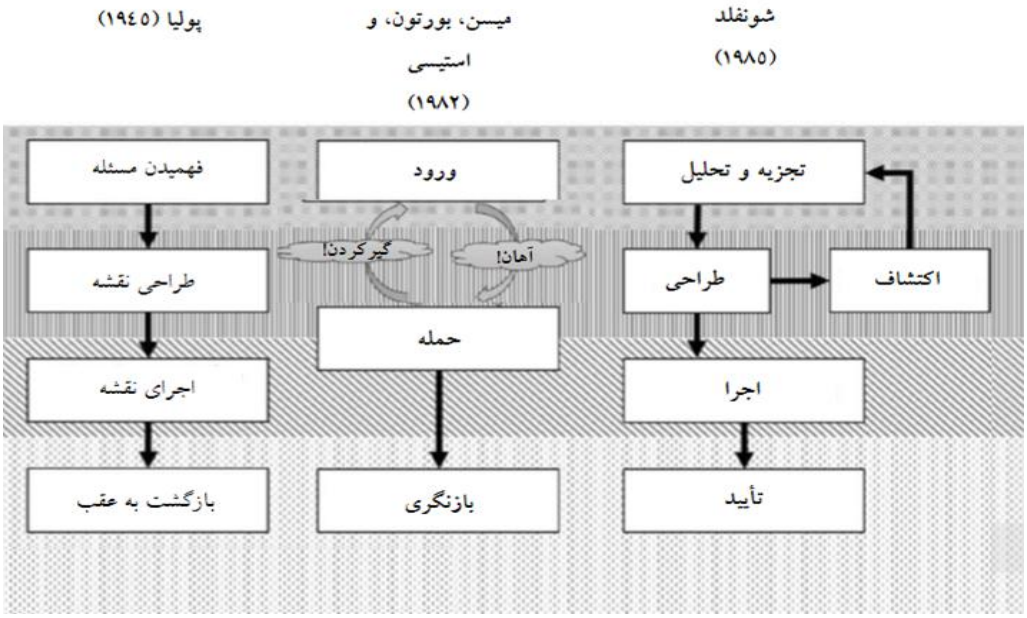
چارچوب حل مسئله پولیا (۱۹۴۵)، که ریشه در الگوی حل مسئله دیویی دارد، شامل چهار مرحله اساسی است: فهم مسئله، طراحی نقشه، اجرای نقشه و بازگشت به عقب. در این چارچوب، فرایندهایی که معمولاً توسط حل‌کنندگان خبره به‌کار گرفته می‌شود، به‌صورت صریح به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود (Schroeder & Lester, 1989). افزون بر این، در مرحله طراحی نقشه، مجموعه‌ای از راهبردهای اکتشافی به دانش‌آموزان معرفی می‌شود تا بتوانند مسیر مناسبی برای حل مسئله انتخاب کنند. از جمله این راهبردها می‌توان به رسم شکل، شناسایی و ایجاد الگو، حذف حالت‌های نامطلوب، حل مسئله‌های ساده‌تر یا مسائل فرعی، حدس و آزمایش، و استفاده از روش‌های جبری اشاره کرد. این راهبردها به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا با انعطاف‌پذیری بیشتری به تحلیل مسئله پرداخته و راه‌حل‌های متنوعی را بررسی کنند.

شونفلد (۱۹۸۵) بر این باور است که اگرچه چارچوب حل مسئله پولیا به برنامه‌های درسی راه یافته، اما در عمل با موفقیت کامل همراه نبوده است (ریحانی و حقجو، ۲۰۱۹). به‌زعم او، عواملی نظیر تعدد راهبردهای پیشنهادی، دشواری انتخاب راهبرد مناسب در موقعیت‌های مسئله‌ای، پیچیدگی کاربرد این چارچوب برای حل‌کنندگان مبتدی و همچنین چالش‌های مرتبط با آموزش آن، از محدودیت‌های اساسی چارچوب پولیا به‌شمار می‌آیند (Schoenfeld, 1985, 1992). در پاسخ به این کاستی‌ها، شونفلد چارچوبی ارائه می‌کند که بر چهار مؤلفه اصلی استوار است: منابع (دانش ریاضی)، رهیافت‌های حل مسئله، کنترل (برنامه‌ریزی، بازبینی و دانش فراشناختی)، و نظام باورها (باور فرد نسبت به خود، موضوع و ریاضیات). بر پایه این مؤلفه‌ها، وی فرایند حل مسئله را در قالب پنج مرحله شامل تجزیه و تحلیل، طراحی، کاوش، اجرا و تأیید صورت‌بندی می‌کند. به‌گفته شونفلد، مراحل تجزیه و تحلیل، طراحی و کاوش ماهیتی چرخه‌ای دارند و می‌توانند به‌صورت تکرارشونده در جریان حل مسئله به‌کار گرفته شوند. از دستاوردهای مهم این چارچوب، برجسته‌سازی نقش فرایندهای فراشناختی در هدایت فعالیت‌های حل مسئله است. با این حال، این چارچوب نیز به‌طور کامل از محدودیت‌ها مبرا نیست؛ چراکه تقویت کنترل ذهنی و ایجاد تغییر در نظام باورهای شناختی، به‌ویژه در میان یادگیرندگان مبتدی، فرایندی پیچیده و زمان‌بر است (Rott et al., 2021).

چارچوب میسن، برتون و استیسی (۱۹۸۲) که متأثر از چارچوب پولیا توسعه یافته است، شامل سه مرحله اصلی ورود، حمله و بازنگری است. در بطن این مراحل، چهار فرایند کلیدی تفکر ریاضی یعنی تخصیص، حدس‌ورزی، تعمیم

و اقناع، به‌صورت پویا شکل می‌گیرند. فرایند حل مسئله در این چارچوب با مرحله ورود آغاز می‌شود که ناظر بر فهم مسئله است؛ به‌گونه‌ای که حل‌کننده به‌روشنی مشخص می‌کند چه می‌داند، چه چیزی را باید بیابد و چه اطلاعات یا ابزارهایی را می‌تواند در مسیر حل به‌کار گیرد. در ادامه، در مرحله حمله، با تمرکز بر بررسی حالت‌های خاص (تخصیص)، حدس‌هایی شکل می‌گیرد که زمینه را برای تعمیم فراهم می‌سازد؛ سپس، ارائه استدلال و توجیه منطقی (اقناع) در جهت تثبیت راه‌حل صورت می‌گیرد. در نهایت، در مرحله بازنگری، صحت پاسخ ارزیابی شده و امکان ارائه راه‌حل‌های جایگزین یا تعمیم‌های گسترده‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

با این حال، در رویکرد تدریس درباره حل مسئله، چنان‌چه تأکید صرف بر آموزش چارچوب‌های حل مسئله باشد، این خطر وجود دارد که حل مسئله به‌عنوان یک مؤلفه افزوده و مستقل در برنامه درسی تلقی شود. در چنین وضعیتی، به‌جای آن‌که حل مسئله به‌مثابه بستری برای یادگیری و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی ایفای نقش کند، ممکن است به یک محتوای آموزشی مجزا تقلیل یابد. شکل ۱ مقایسه مراحل سه چارچوب اصلی حل مسئله را نشان می‌دهد.



شکل ۱. مقایسه‌ی مراحل چارچوب‌های حل مسئله (Rott et al., 2021; Kashefi, 2022)

- **تدریس از طریق حل مسئله**

در این رویکرد، مسئله صرفاً به‌عنوان هدف یادگیری ریاضی در نظر گرفته نمی‌شود، بلکه نقش محوری آن به‌عنوان ابزار اصلی یادگیری نیز مورد تأکید قرار می‌گیرد (Schroeder & Lester, 1989). آموزش ریاضی با طرح یک موقعیت غیرمعمول یا مسئله‌ای برگرفته از زندگی واقعی آغاز می‌شود؛ موقعیتی که زمینه‌ساز درگیری فعال یادگیرندگان با مفاهیم است. در جریان فرایند حل مسئله، مفاهیم و مهارت‌های ریاضی به‌صورت تدریجی و در بستر همان مسئله شکل می‌گیرند و تعمیق می‌یابند. بر این اساس، نقش معلم فراتر از انتقال مستقیم دانش بوده و به هدایت یادگیرندگان در مسیر اکتشاف، بررسی و تحلیل شواهد تغییر می‌یابد؛ به‌گونه‌ای که دانش‌آموزان بتوانند از طریق جست‌وجو و استدلال، راه‌حل‌های مناسب را بیابند (شعبانی، ۲۰۱۵). در چنین چارچوبی، یادگیری ریاضی فرآیندی تدریجی از تجربه‌های عینی به درک مفاهیم انتزاعی است که به‌طور معنادار در بستر حل مسئله تحقق می‌یابد.

تدریس از طریق حل مسئله، رویکردی است که با توصیه‌های شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM, 1987) هم‌راستا است؛ و بر توصیه‌هایی که بر یادگیری مفاهیم و مهارت‌های ریاضی در بستر حل مسئله، پرورش فرایندهای

تفکر سطح بالا از طریق تجربه‌های مسئله‌محور، و نیز ایجاد محیط‌های یادگیری مبتنی بر پرسش و کاوش تأکید دارند. این رویکرد همچنین با دیدگاه شرودر و لستر (۱۹۸۹) درباره شکل‌گیری محیط‌های آموزشی پرسش‌محور و مسئله‌محور هم‌خوانی دارد. بر این اساس، آموزش مبتنی بر حل مسئله می‌تواند یکی از اهداف اساسی یادگیری ریاضیات، یعنی تبدیل مسائل غیرمعمول به مسائل معمول، را محقق سازد. افزون بر این، این دیدگاه به توسعه استانداردهای فرایندی در قالب تفکر ریاضی کمک می‌کند و در عین حال، اهداف مطرح‌شده در استاندارد حل مسئله شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا (۲۰۰۰) را نیز تقویت می‌نماید؛ از جمله توانایی دانش‌آموزان در «ساخت دانش جدید در ریاضیات از طریق حل مسئله» و «حل مسائل در زمینه ریاضیات و در حوزه‌های دیگر دانش». در این نوع آموزش، نقش معلم از انتقال‌دهنده دانش به تسهیل‌گر یادگیری تغییر می‌یابد و دانش‌آموزان با مشارکت فعال در فعالیت‌های آموزشی، در فرایند یادگیری درگیر می‌شوند (شعبانی، ۲۰۱۵). در نتیجه، علاوه بر یادگیری مفاهیم ریاضی، مهارت‌هایی نظیر کار گروهی، تفکر انتقادی، خلاقیت، جستجوگری و توانایی مواجهه با مسائل جدید نیز در آنان تقویت می‌شود. با وجود این مزایا، رویکرد تدریس از طریق حل مسئله، در مقایسه با برخی رویکردهای دیگر، به‌طور گسترده از سوی معلمان، مؤلفان کتاب‌های درسی و برنامه‌ریزان آموزشی مورد پذیرش قرار نگرفته است (شرودر و لستر، ۱۹۸۹). این امر را می‌توان ناشی از الزامات اجرایی این رویکرد دانست؛ از جمله نیاز به معلمان باتجربه، طراحی دقیق و هدفمند مسائل، و اجرای صحیح مراحل حل مسئله. همچنین، چالش‌هایی مانند زمان‌بر بودن فرایند آموزش، نیاز به امکانات و فضای آموزشی مناسب، محدودیت‌های کلاس‌های پرجمعیت و دشواری در ارزشیابی عملکرد دانش‌آموزان، از دیگر موانع به‌کارگیری گسترده این روش به‌شمار می‌آیند.

برای تدریس از طریق حل مسئله، می‌توان از الگوهای تدریس 5E و 7E استفاده کرد. چرخه‌ی یادگیری 5E یکی از الگوهای ساخت‌گرایی است که از پنج مرحله تشکیل شده و E نیز حرف اول واژه‌های انگلیسی تشکیل‌دهنده‌ی این مراحل است: درگیرکردن[1]، کاوش‌کردن[2]، توضیح‌دادن[3] ، شرح و بسط‌دادن[4] و ارزیابی‌کردن[5] (Bybee et al., 2006; Bybee, 2019). الگوی تدریس 7E، نسخه‌ی توسعه‌یافته‌ی 5E است و هفت مرحله‌ی استخراج‌کردن[6]، درگیرکردن، کاوش‌کردن، توضیح‌دادن، شرح و بسط‌دادن و ارزیابی‌کردن و گسترش‌دادن[7]، چرخه‌ی یادگیری آن‌را بیان می‌کنند (Eisenkraft, 2003). در این الگوی تدریس، دانش‌آموزان بر اساس دانش و تجربه‌های پیشین خود، دانش و مفاهیم جدید را می‌سازند؛ با یکدیگر تعامل می‌کنند و مسئله‌ها را در قالب فعالیت‌های جذاب و چالش‌برانگیز، با نظارت معلم به‌عنوان تسهیل‌گر، بررسی و حل می‌کنند.

در الگوی تدریس 5E، مرحله‌ی درگیرکردن بیشتر برای تحریک، جذب و درگیر کردن دانش‌آموزان با مسئله استفاده می‌شود و کم‌تر بر استخراج اطلاعات درباره‌ی دانش قبلی و برداشت‌های نادرست دانش‌آموزان تأکید دارد. به همین دلیل، مرحله‌ی درگیری در الگو 5E در الگو تدریس 7E به دو مرحله‌ی استخراج‌کردن و درگیرکردن گسترش یافته است. مرحله‌ی جدید استخراج‌کردن به بررسی دانش قبلی دانش‌آموزان، مشخص کردن بدفهمی‌ها و تعیین نیازهای آنان پیش از یادگیری دانش و محتوای جدید می‌پردازد. همچنین الگو تدریس 7E مرحله‌ی جدید دیگری به‌نام گسترش دادن دارد که پس از مرحله‌ی ارزشیابی در الگو 5E قرار می‌گیرد و هدف آن انتقال دانش جدید به حوزه‌های تازه، رشته‌های دیگر و زندگی روزمره است. در الگو 5E، بسط موضوع و گاهی تعمیم مفاهیم در مرحله‌ی شرح و بسط دادن انجام می‌شد. اما در آموزش ریاضیات، قرار گرفتن مرحله‌ی گسترش‌دادن به‌عنوان مرحله‌ی پایانی

[1] Engagement
[2] Exploration
[3] Explanation
[4] Elaboration
[5] Evaluation
[6] Elicit
[7] Extend

الگو 7E، با توجه به تثبیت مفهوم برای دانش‌آموز پس از ارزشیابی، برای تعمیم‌دهی و مطرح کردن مسائل جدید توسط دانش‌آموزان و انتقال مفاهیم و دانش آنان به موقعیت‌های تازه مناسب‌تر است. در جدول۲، ضمن مقایسه‌ی شباهت‌ها و تفاوت‌های مراحل الگوهای تدریس 5E و 7E، توضیحات مربوط به دو مرحله‌ی جدید در الگو تدریس 7E نیز ارائه شده است.

جدول ۲. مقایسه‌ی مراحل الگوهای تدریس 5E و 7E (Kashefi, 2021)

الگوی تدریس 5E	الگوی تدریس 7E
درگیرکردن	استخراج‌کردن (مرحله‌ی جدید): ارزیابی دانش پایه‌ی دانش‌آموزان و شناسایی و اصلاح برداشت‌های نادرست آنان
	درگیرکردن
کاوش‌کردن	کاوش‌کردن
توضیح‌دادن	توضیح‌دادن
شرح و بسط‌دادن	شرح و بسط‌دادن
ارزیابی‌کردن	ارزیابی‌کردن
	گسترش‌دادن (مرحله‌ی جدید): تشویق دانش‌آموزان به انتقال دانش به موقعیت‌های جدید و به‌کارگیری آن

- **تدریس به‌وسیله حل مسئله**

رویکرد تدریس به‌وسیله حل مسئله در این پژوهش، بر پایه چارچوب نظری میسن و همکاران (۱۹۸۲) استوار است. هرچند این مدل در ابتدا به‌عنوان راهبردی برای تدریس درباره‌ی حل مسئله تدوین شده بود، اما ماهیت فرایندمحور آن، ظرفیت‌های بالایی را برای به‌کارگیری به‌عنوان یک روش تدریس کارآمد در آموزش ریاضیات فراهم می‌سازد. بنا بر آن‌چه پیش‌تر آمد، جوهره‌ی حل مسئله در این دیدگاه، بر حلقه‌ی پیوسته‌ی تخصیص و تعمیم تکیه دارد؛ به بیان دیگر، دانش‌آموز از طریق بررسی نمونه‌های موردی و درک روابط میان آن‌ها (تخصیص)، به کشف و حدس الگوهای کلی (تعمیم) نائل می‌شود. این سازوکار، به‌طور مستقیم با مهارت‌های استدلال، اثبات و حتی توانمندی در طرح مسئله گره خورده است. در این الگو، معلم نه در نقش انتقال‌دهنده دانش، بلکه در مقام تسهیل‌گری ظاهر می‌شود که با طرح پرسش‌های راهبردی، شاگردان را در مسیر کشف شباهت‌ها، تمایزها و در نهایت درک عمیق قواعد ریاضی هدایت می‌کند (به عنوان نمونه، بنگرید به: کاشفی، ۲۰۲۲). بهره‌گیری از این روش تدریس، علاوه بر تقویت هدف استاندارد حل مسئله مانند «پایش و تأمل در فرایند حل مسئله‌ی ریاضی»، زمینه‌ساز ارتقای تفکر ریاضی در فراگیران است. تمایز کلیدی این روش با مدل‌های سنتی (مانند چارچوب‌های پولیا و شونفلد)، در سهولت اجرا و توجه ویژه به پرورش مهارت طرح مسئله نهفته است. افزون بر این، در تدریس به‌وسیله حل مسئله، معلم می‌تواند بدون درگیرکردن دانش‌آموز با جزئیات فنی و نظری خود چارچوب‌ها، مفاهیم ریاضی را در بطن چالش‌ها آموزش دهد؛ امری که محدودیت‌های رایج در آموزش‌های کلاسیک را مرتفع می‌سازد. شایان ذکر است که این الگو دارای انعطاف‌پذیری بالایی بوده و در تمامی سطوح تحصیلی، از آموزش ابتدایی تا آموزش عالی، قابلیت عملیاتی شدن دارد. برای نمونه، یوداریا، ساباریا و روزلینی (۲۰۰۹) در اثر خود با عنوان «حساب چندمتغیره برای یادگیرندگان مستقل»، به‌خوبی نشان داده‌اند که چگونه می‌توان پیچیده‌ترین مفاهیم دانشگاهی را از طریق این رویکرد به دانشجو منتقل کرد.

هرچند در ادبیات تحقیق، تفکیک سه‌گانه رویکردهای تدریس مبتنی بر حل مسئله به وضوح مشخص است، اما در عمل، این رویکردها با یکدیگر هم‌پوشانی دارند و به‌صورت ترکیب‌ها و توالی‌های متفاوت رخ می‌دهند. همین هم‌پوشانی عملی موجب شده است که استدلال‌های له یا علیه هر یک از این روش‌ها، گاه متناقض جلوه کند. با این حال، ضرورت دارد که سیاست‌گذاران آموزشی، مؤلفان کتب درسی و معلمان، پیش از تمرکز بر هر کدام از این الگوها، نسبت به

چالش‌ها، محدودیت‌های اجرایی و پیامدهای ناشی از تقلیل‌گرایی (پایبندی صرف بـه یـک روش واحـد) آگـاهی کامـل یابند. جدول ۳ نمایانگر نسبت میان هر یک از اهداف استاندارد فرایندی حل مسئله با رویکرد تدریس متناظر آن است. تأمل در این موارد نشان می‌دهد که چنان‌چه فرایند تدریس مسئله‌محور با دقت و وفاداری به مبانی نظری اجـرا شـود، نه تنها اهداف چهارگانه در حوزه استاندارد حـل مسـئله تحقـق مـی‌یابنـد، بلکـه زمینـه‌ی تقویـت و هـم‌افزایـی سـایر استانداردهای فرایندی نیز فراهم خواهد شد.

جدول ۳. استاندارد حل مسئله و روش‌های تدریس

اهداف استاندارد حل مسئله	روش‌های تدریس
ساخت دانش جدید در ریاضیات از طریق حل مسئله	• تدریس از طریق حل مسئله – الگوهای تدریس 5E یا 7E
حل مسائل در زمینه ریاضیات و در حوزه های دیگر دانش	
به‌کارگیری و سازگار کردن مجموعه‌ای متنوع از راهبردهای مناسب برای حل مسائل	• تدریس درباره‌ی حل مسئله: • - چارچوب حل مسئله‌ی پولیا (۱۹۴۵) - چارچوب حـل مسـئله‌ی شونفلد (۱۹۸۵) • - چارچوب حل مسئله‌ی میسن، برتون و استیسی (۱۹۸۲)
پایش و تأمل در فرایند حل مسئله‌ی ریاضی	• تدریس به‌وسیله حل مسئله (بـر اسـاس چـارچوب حـل مسـئله‌ی میسن، برتون و استیسی (۱۹۸۲))

استاندارد پیوند و ارتباطات

قابلیت برقراری پیوند و ارتباطات ریاضی، به‌عنوان یکی از کلیدی‌ترین استانداردهای فرایندی، زیربنای مسـتحکم تفکـر ریاضی را تشکیل می‌دهد (Scusa, 2008; Siregar & Siagian, 2019). این مولفه، ابزاری کارآمد در اختیار دانش‌آموزان قرار می دهد تا از طریق آن، ساختارهای ذهنـی و درک ریاضـی خـود را وسـعت بخشـیده و تثبیـت کننـد. در پهنـه‌ی برنامه‌ی درسی، این فرایند شناختی طیف وسیعی از تعاملات معنایی را در بر می‌گیرد؛ از جمله ارتباط میان یک مفهوم ریاضی با مفهوم دیگر، ارتباط میان شاخه‌های مختلف ریاضیات، ارتباط میان ریاضیات و سایر حوزه‌های دانش، و ارتباط میان ریاضیات و زندگی روزمره.

قابلیت پیوند میان ایده‌های نوین ریاضی و ساختارهای شناختی پیشین، نقشـی بنیـادین در تعمیـق یـادگیری ایفـا می‌کند. این رویکرد به فراگیران یاری می‌رساند تا ریاضیات را به‌جای مجموعه‌ای از فنون و مفاهیم گسسـته، بـه مثابـه منظومه‌ای منسجم و یکپارچه ادراک کنند (NCTM, 2000). از آن‌جا که جوهره تفکر ریاضی بر جست‌وجوی پیوندها و برقراری نظام‌مند میان ایده‌ها استوار است، رویکرد تدریس به‌وسیله حل مسئله بستری بهینه برای تقویت توانمنـدی در «تشخیص و استفاده از ارتباطات میان ایده‌های ریاضی» فراهم مـی‌آورد. ایـن شـیوه تـدریس، بـر دو محـور تخصـیص (واکاوی حالت‌های خاص) و تعمیم (کشف الگوهای کلی) بنا شده است. در این فرایند، دانش‌آمـوز از طریـق اسـتراتژی مقایسه و شناسایی وجوه اشتراک و تمایز، میان یافته‌های جزئی ارتباط برقرار کرده و به حدس الگوهـا نائـل مـی‌شـود. علاوه بر این، انتخاب و بیان راهبرد مناسب برای مسئله‌های گوناگون، تبدیل عبارات کلامی به عبارات جبـری، و ایجـاد پیوند میان روابط جزئی (تخصیص) و رسیدن به رابطه‌ی کلی(تعمیم) از نکات مهمی هستند که باید در این دوره مورد توجه قرار گیرند. در نهایت، درک و به‌کارگیری این شبکه‌ی ارتباطی، نه‌تنها مهارت حل مسئله را ارتقا مـی‌دهـد، بلکـه سایر استانداردهای فرایندی نظیر استدلال و اثبات و گفتمـان ریاضـی، بـه‌ویـژه در بافـت حـل مسـئله گروهـی را غنـا می‌بخشد. برآیند این کنش‌های متقابل، در نهایت به بالندگی و شکوفایی تفکر ریاضی در دانش‌آموزان می‌انجامد.

به منظور تسهیل فرآیند ارتباط میان ریاضیات با زندگی روزمـره و همچنـین ریاضـیات و سـایر علـوم، معلمـان بـا طراحی فعالیت‌ها و تکالیف در قالب یادگیری مسئله‌محور، می‌توانند بستری فراهم کنند تا دانش‌آموزان پیوستگی میـان چالش‌های دنیای واقعی و ساختارهای انتزاعی ریاضی را به‌طور ملموس تجربه و درک کنند. در این راستا، بـه‌کـارگیری

الگوهای تدریس 5E و 7E در تحقق هدف «شناخت و به‌کارگیری ریاضیات در زمینه‌هایی خارج از ریاضیات» بسیار اثرگذار است. این الگوها نه تنها توانمندی حل مسئله را در فراگیران ارتقا می‌دهند، بلکه مهارت‌های پژوهش علمی و روحیه تعامل در قالب کار گروهی را نیز تقویت می‌کنند. به‌ویژه، الگوی 7E با تأکید بر مرحله استخراج کردن، به دانش‌آموزان یاری می‌رساند تا انگاره‌های ذهنی و بدفهمی‌های احتمالی خود را در خصوص پیش‌نیازهای درسی شناسایی و اصلاح کنند. از این منظر، الگوهای مذکور در دستیابی به سایر اهداف استاندارد پیوند و ارتباطات — نظیر «تشخیص و استفاده از ارتباط میان ایده‌های ریاضی»، «درک چگونگی پیوند و ساخت مفاهیم ریاضی بر یکدیگر برای ایجاد یک کل منسجم» — نقشی کلیدی ایفا می‌کنند. در واقع، با تکیه بر تجارب زیسته و دانش پیشین فراگیران و با اشراف بر گره‌های شناختی آنان، می‌توان مفاهیم نوین را با استحکام بیشتری بر سازه‌های ذهنی گذشته بنا نهاد. در نهایت، درگیر شدن دانش‌آموزان در پروژه‌ها و پژوهش‌های اصیل، منجر به برقراری پیوندهایی ژرف میان مفاهیم گشته که ثمره آن، غنای تفکر ریاضی و دستیابی به لایه‌های عمیق‌تری از درک مفاهیم خواهد بود.

- **الگوی تدریس پیش سازمان‌دهنده**

مطابق با نظریه یادگیری معنادار آزوبل، پایداری و سهولت یادگیری زمانی محقق می‌شود که دانش نوین بر زیرساخت‌های دانش پیشین استوار گشته و در شبکه‌ی طرح‌واره‌های ذهنی فراگیر ادغام شود. این رویکرد، مبنایی استوار برای الگوهای تدریسی فراهم می‌آورد که با ایجاد پیوندهایی میان دانسته‌های قبلی و آموزه‌های جدید، درک عمیق را تسهیل می‌کنند. از نظر آزوبل (۱۹۶۸)، پیش سازمان‌دهنده مفهومی است که موضوع تازه برای تدریس را به اطلاعات آشنا برای دانش‌آموز مرتبط کرده و ماندگاری آن را در حافظه افزایش می‌دهد؛ این سازمان‌دهنده می‌تواند به صورت متنی کوتاه و ساختارمند در ابتدای درس ارائه شود تا پیوند میان آموخته‌های قبلی و مطالب جدید را برقرار کند. پیش سازمان‌دهنده‌ها به دو نوع اصلی تقسیم می‌شوند: سازمان‌دهنده‌ی توضیحی و سازمان‌دهنده‌ی مقایسه‌ای. نوع توضیحی زمانی به کار می‌رود که دانش‌آموزان هیچ اطلاع قبلی درباره‌ی مفهوم جدید ندارند و مراحل اجرای آن بر اساس مدل‌های بروس و مارشاک (۱۹۹۰) و صدیقی و خان (۱۹۹۱) شامل سه بخش اصلی ارائه‌ی سازمان‌دهنده، ارائه‌ی محتوای یادگیری، و تقویت پیش سازمان‌دهنده است. از طرفی، سازمان‌دهنده‌ی مقایسه‌ای هنگامی استفاده می‌شود که دانش‌آموزان با موضوع آشنایی قبلی دارند و هدف آن، کمک به درک عمیق‌تر و کشف بهتر مفاهیم تازه از طریق مقایسه‌ی آگاهانه‌ی مفاهیم جدید و قدیم و آشکارسازی تفاوت‌های بین آن‌ها است.

بر این اساس، بهره‌گیری از این الگوی تدریس، مسیری بهینه برای تحقق اهداف استاندارد پیوند و ارتباطات از جمله «تشخیص و استفاده از پیوندها و ارتباطات میان ایده‌های ریاضی» و «درک چگونگی ارتباط و ساخته‌شدن ایده‌های ریاضی بر روی یکدیگر برای ایجاد یک کل منسجم»، نقشی کلیدی ایفا می‌کند.

- **نقشه‌ی مفهومی**

سازمان‌دهنده‌های گرافیکی[1]، به‌عنوان ابزارهایی کارآمد جهت نمایش ساختارمند دانش و تعمیق درک محتوایی شناخته می‌شوند. این سازه‌ها در واقع بازنمایی‌های بصری موثری هستند که با آشکارسازی روابط ساختاری میان مفاهیم کلیدی، به دانش‌آموزان در تکوین بازنمایی‌های ذهنی منسجم یاری می‌رسانند (Sandoval, 2020). در این میان، معلمان می‌توانند از نقشه‌ی مفهومی به‌عنوان گونه‌ای از سازمان‌دهنده‌های گرافیکی بهره جسته و از این طریق، فرآیند پیونددهی میان ایده‌های ریاضی و «درک نحوه‌ی پیوند و ساخت مفاهیم بر یکدیگر» را جهت شکل‌دهی به یک ساختار واحد و نظام‌مند تسهیل کنند.

نقشه‌ی مفهومی، که نخستین بار توسط نوواک (۲۰۱۰) به‌عنوان ابزاری برای یادگیری دیداری توسعه یافت، به فراگیران کمک می‌کند تا انگاره‌های ذهنی خود را سازمان‌دهی کرده و مهارت‌های خواندن، نوشتن و تفکر تحلیلی خویش را ارتقا بخشند؛ علاوه بر این، این ابزار بستری مناسب برای بازشناسی بدفهمی‌های احتمالی و ایجاد پل‌های

[1] Graphic Organizers

ارتباطی میان مفاهیم مجرد فراهم می‌آورد. در این الگو، مفاهیم در قالب گره‌هایی (دایره یا مستطیل) تعریف شده و از طریق واحدهای معنایی و گزاره‌های پیونددهنده به یکدیگر متصل می‌شوند (Novak, & Cañas, 2006). ساختار این نقشه‌ها غالباً به‌صورت سلسله‌مراتبی تنظیم می‌گردد؛ به‌گونه‌ای که مفاهیم کلی و انتزاعی در سطوح فوقانی و مفاهیم جزئی و مصادیق در سطوح پایین‌تر جای می‌گیرند.

نقشه‌ی مفهومی فراتر از یک ابزار آموزشی، کارکردی دوگانه در یادگیری و ارزشیابی دارد. معلم با به‌کارگیری این ابزار، نه‌تنها پیوستگی میان مفاهیم نوین و دانش پیشین را به نمایش می‌گذارد، بلکه می‌تواند به عمق توانمندی دانش‌آموز در برقراری پیوندهای معنادار ریاضی پی ببرد. بر این اساس، نقشه‌ی مفهومی نقشی کاتالیزور در دستیابی به اهداف استانداردهای ارتباطات ریاضی ایفا می‌کند؛ به‌ویژه اهدافی نظیر «تشخیص و استفاده از پیوندها و ارتباطات میان ایده‌های ریاضی» و «درک چگونگی ارتباط و ساخته‌شدن ایده‌های ریاضی بر روی یکدیگر برای ایجاد یک کل منسجم».

جدول ۴ راهبردهای تقویت استانداردهای پیوند و ارتباطات را از طریق روش‌های مختلف تدریس تبیین می‌نماید.

جدول ۴: استاندارد پیوند و ارتباطات و روش‌های تدریس

اهداف استاندارد پیوند و ارتباطات	روش‌های تدریس
تشخیص و استفاده از پیوندها و ارتباطات میان ایده‌های ریاضی	• روش تدریس پیش سازمان‌دهنده • نقشه‌ی مفهومی • تدریس به‌وسیله حل مسئله (بر اساس چارچوب حل مسئله‌ی میسن، برتون و استیسی (۱۹۸۲)) • الگوی تدریس 7E
درک چگونگی ارتباط و ساخته‌شدن ایده‌های ریاضی بر روی یکدیگر برای ایجاد یک کل منسجم	• روش تدریس پیش سازمان‌دهنده • نقشه‌ی مفهومی • الگوی تدریس 7E
تشخیص و استفاده از ریاضیات در حوزه‌هایی خارج از ریاضیات • پیوند ریاضیات با زندگی روزمره • پیوند ریاضیات با سایر علوم	• تدریس از طریق حل مسئله – الگوهای تدریس 5E یا 7E

استاندارد استدلال و اثبات

یکی از اهداف استاندارد استدلال و اثبات، تغییر بنیادین یادگیری ریاضیات از یادگیری رویه‌ی و استدلال سطحی ریاضی به یادگیری معنادار است. بر اساس این استاندارد، که در تمام پایه‌های تحصیلی و در تمام حوزه‌های محتوایی (نه فقط هندسه) کاربرد دارد، تلاش بر این است که دانش‌آموزان ریاضیات را نه به عنوان مجموعه‌ای از قوانین، بلکه به عنوان یک سیستم مبتنی بر منطق و توجیه درک کنند. از آن‌جا که NCTM استدلال را یک عادت ذهنی می‌داند، نهادینه‌سازی آن مستلزم استمرار در به‌کارگیری روش‌های تدریس فعال در بطن تعاملات روزمره‌ی کلاسی است.

تحقق بهینه‌ی اهدافی نظیر «شناسایی استدلال و اثبات به عنوان جنبه های بنیادی ریاضیات»، توانایی طرح حدس‌های ریاضی و بررسی آن‌ها»، و «توسعه و ارزیابی استدلال ها و برهان‌های ریاضی»، در گرو درگیر ساختن دانش‌آموزان با ارائه تدریس و تکالیف چالش‌برانگیز بر اساس رویکرد تدریس به‌وسیله‌ی حل مسئله است. در اجرای تدریس به‌وسیله حل مسئله بر اساس مدل میسن و همکاران (۱۹۸۲)، ابتدا حدس‌ها و سپس تعمیم‌ها بر پایه واکاوی حالت‌های خاص شکل می‌گیرند؛ متعاقب آن، صحت این حدس‌ها و استحکام منطقی استدلال‌ها و اثبات‌های برآمده از آن‌ها، به بوته‌ی نقد و بحث گذاشته می‌شود.

- **روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی**

روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی، رویکردی گفت‌وگومحور و مبتنی بر پرسش‌گری نظام‌مند است که در آن، معلم با عبور از جایگاه سنتی انتقال‌دهنده اطلاعات، نقش تسهیل‌گر شناختی را ایفا می‌کند. در این رویکرد، یادگیری نه از طریق القای مفاهیم، بلکه با طرح زنجیره‌ای از پرسش‌های هدایت‌گر و چالش‌برانگیز محقق می‌شود که فراگیران را به واکاوی پیش‌فرض‌ها، شناسایی تناقضات ذهنی و در نهایت، بازسازی آگاهانه‌ی حقیقت وامی‌دارد (Overholser, 2011). این الگوی آموزشی با جایگزینی مشارکت فعال به‌جای سخنرانی‌های یک‌سویه، دانش‌آموزان را بر آن می‌دارد تا با تکیه بر استدلال منطقی و تفکر انتقادی، ساختارهای دانش را به‌طور مستقل در ذهن خود بنا کرده و به درکی عمیق و ماندگار نائل شوند (Paul & Elder, 2019).

در این چارچوب، ماهیت وظایف معلم از عرضه‌کننده‌ی دانش به مدیری برای تعاملات دوجانبه تغییر می‌یابد. این امر مستلزم تسلط حرفه‌ای بر فنون گوش‌دادن فعال و تحلیلی است؛ به‌گونه‌ای که معلم نه‌تنها گزاره‌های کلامی، بلکه زیرساخت‌های منطقی استدلال‌های دانش‌آموزان را واکاوی کرده و با بازشناسی لحظات کلیدی برای مداخله، جریان گفتمان را بدون تحمیل آرای شخصی و صرفاً از طریق بازخوردهای پرسشی هدایت نماید (Chesters, 2012). افزون بر مدیریت شناختی، معلم مسئولیتی خطیر در توازن‌بخشی به ساحت عاطفی کلاس بر عهده دارد. او باید با برقراری تعادلی ظریف میان به چالش کشیدن باورهای دانش‌آموزان و صیانت از امنیت روانی آنان، فضایی ایمن ایجاد کند که در آن، نقد اندیشه به معنای تخریب شخصیت تلقی نشود (Fisher, 2005; Neumayr et al., 2019). در چنین بستر امنی است که فراگیر با اعتمادبه‌نفس کامل در فرآیند بازاندیشی مشارکت جسته و مهارت‌های استدلالی خود را صیقل می‌دهد.

با توجه به این‌که اهداف «توسعه و ارزیابی استدلال‌ها و برهان‌های ریاضی» و «انتخاب و به‌کارگیری انواع مختلف استدلال و روش‌های گوناگون اثبات»، نیازمند برقراری یک گفتمان ریاضی معنادار در فضای کلاس است. در این فرآیند، معلم با بهره‌گیری از پرسش‌گری سقراطی و طرح سؤالات هدفمند، دانش‌آموزان را به سوی توجیه منطقی، نقد روش‌مند و در صورت لزوم، بازنگری در استدلال‌های خود و همتایانشان هدایت می‌کند. این کنش متقابل، فرآیند اثبات را از یک کنش فردی به یک تجربه‌ی جمعی و استدلالی ارتقا می‌دهد.

- **یادگیری مشارکتی**

یادگیری مشارکتی در آموزش ریاضیات، فراتر از یک تعامل گروهی ساده، به مثابه بازسازی اجتماعی مفاهیم انتزاعی در بستر گفتمان و تشریک مساعی تلقی می‌شود؛ راهبردی که در آن فراگیران با درآمیختن استدلال‌های فردی و تبادل دیدگاه‌های متکثر، به ساخت جمعی معنا نائل می‌آیند (Barkley et al., 2014). این رویکرد که ریشه در نظریه رشد اجتماعی ویگوتسکی (۱۹۷۸) دارد، با تکیه بر اصل هم‌بستگی مثبت، موفقیت هر عضو را در گرو پیشرفت کل گروه تعریف کرده و از طریق پاسخ‌گویی فردی، مانع از انفعال دانش‌آموزان در فرآیند حل مسئله می‌گردد (Johnson & Johnson, 2009; Slavin, 1995). در کلاس‌های ریاضی، یادگیری مشارکتی با تبدیل کلاس به یک جامعه کاوشگر، اضطراب ناشی از مواجهه با مسائل پیچیده را تعدیل کرده و به دانش‌آموزان مجال می‌دهد تا با نقد روش‌مند راهبردهای همسالان و بازاندیشی در مفروضات خود، مهارت‌های عالی تفکر و توانمندی در استدلال و اثبات را درونی‌سازی کنند (Davidson & Major, 2014). بدین ترتیب، این الگو نه تنها توانایی تقویت همه اهداف استاندارد استدلال و اثبات ریاضی را دارد بلکه به تثبیت شبکه‌ی مفاهیم ریاضی کمک کرده و با پیوند میان ساحت‌های شناختی و عاطفی، ریاضیات را از مجموعه‌ای از نمادهای گسسته به دانشی پویا، مکالمه‌محور و مرتبط با زیست‌جهان اجتماعی فراگیران مبدل می‌سازد.

جدول ۵ روش‌های تدریس بهینه برای تقویت استاندارد استدلال و اثبات را ارائه می‌دهد.

جدول ۵: استاندارد استدلال و اثبات و روش‌های تدریس

اهداف استاندارد استدلال و اثبات	روش‌های تدریس
شناسایی استدلال و اثبات به عنوان جنبه های بنیادی ریاضیات	• تدریس به‌وسیله حل مسئله (بر اساس چارچوب حل مسئله‌ی میسن، برتون و استیسی (۱۹۸۲)) • یادگیری مشارکتی
توانایی طرح حدس‌های ریاضی و بررسی آن ها	
توسعه و ارزیابی استدلال ها و برهان‌های ریاضی	• روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی • یادگیری مشارکتی • تدریس به‌وسیله حل مسئله (بر اساس چارچوب حل مسئله‌ی میسن، برتون و استیسی (۱۹۸۲))
انتخاب و به‌کارگیری انواع مختلف استدلال و روش‌های گوناگون اثبات	• روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی • یادگیری مشارکتی

استاندارد گفتمان

گفتمان، رکن تفکیک‌ناپذیر دانش ریاضی و فرایند آموزش آن محسوب می‌شود؛ بستری پویا که نه تنها به اشتراک‌گذاری ایده‌ها، بلکه به شفاف‌سازی درک مفاهیم یاری می‌رساند. در پرتو گفتمان کلاسی، انگاره‌های ذهنی از حالت انتزاعی خارج شده و به موضوعاتی برای بازاندیشی، نقد و بازبینی مبدل می‌گردند. این فرآیند تعاملی با عمومی‌سازی اندیشه‌ها، به برساخت معنا و تثبیت ماندگاری مفاهیم در ذهن فراگیران کمک می‌کند. هنگامی‌که دانش‌آموزان به اندیشیدن و استدلال درباره‌ی ریاضیات و نیز به برقراری ارتباط شفاهی یا کتبی درباره‌ی نتایج تفکر خود با دیگران ترغیب می‌شوند، می‌آموزند که چگونه کلام آن‌ها روشن و متقاعدکننده باشند. از سوی دیگر، مواجهه با استدلال‌های همسالان، فرصتی بی‌بدیل برای بسط افق‌های فکری و غنای فهم شخصی فراهم می‌آورد. گفت‌وگوهایی که در آن ایده‌های ریاضی از زوایای گوناگون واکاوی می‌شوند، به مشارکت‌کنندگان کمک می‌کنند تا تفکر خود را صیقل داده و میان مفاهیم گوناگون، پیوندهایی استوار برقرار سازند. دانش‌آموزانی که در موقعیت‌های چالش‌برانگیز گفتمانی قرار می‌گیرند و ملزم به توجیه راهکارهای خود در برابر دیدگاه‌های مخالف می‌شوند، در مسیر اقناع دیگران، به لایه‌های عمیق‌تری از درک ریاضی دست می‌یابند. این کنش متقابل، علاوه بر توسعه‌ی زبان تخصصی ریاضی، ضرورت دقت و صراحت در به‌کارگیری این زبان را برای آنان آشکار می‌سازد. در نهایت، فراگیرانی که در محیطی حمایت‌گر به خواندن، نوشتن و گفت‌وگوی ریاضی می‌پردازند، به دو دستاورد راهبردی نائل می‌شوند: نخست، توانمندی در ارتباط برای یادگیری عمیق در یک بستر اجتماعی؛ و دوم، کسب مهارت در تبادل اندیشه‌ی ریاضی در قالب یک گفتمان فعال و ساختاریافته (NCTM, 2000).

به دلیل ماهیت نمادمحور ریاضیات، غالباً اهمیت ارتباطات شفاهی و کتبی در فرآیند یادگیری این علم مورد غفلت واقع می‌شود. از آن‌جا که دانش‌آموزان به‌طور خودانگیخته به گفتمان ریاضی تمایل نشان نمی‌دهند، وظیفه‌ی معلمان است که بسترهای لازم را برای یادگیری این مهارت کلیدی فراهم آورند (Cobb et al., 1994). جهت تحقق استاندارد گفتمان ریاضی، بهره‌گیری از روش‌های تدریس نظیر گفت‌وگوی سقراطی، یادگیری مشارکتی و الگوهای تدریس 5E یا 7E پیشنهاد می‌شود. روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی با ساختار پویا و پرسش‌محور خود، پتانسیل بالایی در پوشش‌دهی تمامی اهداف استاندارد گفتمان دارد. از سوی دیگر، یادگیری مشارکتی و الگوهای تدریس 5E یا 7E فرصتی فراهم می‌آورند تا فراگیران ضمن سازمان‌دهی و تثبیت تفکر ریاضی خود در بستر گفتگو، به تحلیل و ارزیابی نقادانه‌ی راهبردهای سایر همسالان بپردازند.

- **روش تدریس ایفای نقش**

روش تدریس ایفای نقش، فراتر از یک فعالیت نمایشی ساده، راهبردی تجربه‌محور و مبتنی بر نظریه یادگیری اجتماعی است. این رویکرد با شبیه‌سازی موقعیت‌های چالش‌برانگیز دنیای واقعی، بستری ایمن برای یادگیری فعال، تمرین تصمیم‌گیری و مدیریت تعارضات فراهم می‌آورد. در این فرایند، دانش‌آموزان تحت هدایت معلم و بر اساس ساختاری نظام‌مند — که طبق مدل جویس، ویل و کالهون (۲۰۱۵) مراحلی دقیق از گزینش و آماده‌سازی تا اجرا و

تحلیل نهایی را در بر می‌گیرد — به بازنمایی مفاهیم، دیدگاه‌ها و رفتارهای متکثر می‌پردازند. جوهره‌ی این روش در مرحله‌ی تحلیل و پردازش پس از اجرا نهفته است؛ زیرا به‌زعم پورمن (۲۰۰۲)، در همین فضای بازاندیشی جمعی است که فراگیران با عبور از خودمحوری، مهارت همدلی و درک دیدگاه‌های مخالف را تمرین کرده و یادگیری را از سطح انباشت اطلاعات به سطح درونی‌سازی مهارت‌های ارتباطی ارتقا می‌دهند.

در این روش، معلم می‌تواند با تدوین سناریوهای هدفمند پیرامون یک مفهوم یا چالش ریاضی، فرصتی استثنایی برای دانش‌آموزان فراهم کند تا در بستر یک کنش نمایشی، به شکلی رسمی و ساختاریافته درباره‌ی ریاضیات بیندیشند و به تبادل آرا بپردازند (Nissa et al., 2020). روش تدریس ایفای نقش با ایجاد موقعیت‌های شبیه‌سازی‌شده، به دانش‌آموزان یاری می‌رساند تا فرآیندهای ذهنی خود را در قالب گفتمانی منسجم صورتبندی کرده و اندیشه‌های خود را به شکلی شفاف و نظام‌مند به دیگران انتقال دهند. این رویکردهای ترکیبی، زبان ریاضی را از حالت نمادین صرف خارج کرده و آن را به ابزاری برای تبادل معنا مبدل می‌سازند.همچنین، تقویت تعاملات گروهی و ارتقای مهارت‌های همکاری، از دستاوردهای کلیدی این رویکرد محسوب می‌شود (Jackson & Walters, 2000; Mogra, 2012). افزون بر این، ایفای نقش ظرفیت بالایی در پرورش قوه‌ی ابتکار، مسئله‌سازی و توسعه‌ی مهارت‌های حل مسئله دارد (Pratiwi et al., 2022). نمونه‌های کاربردی از سناریوهای آموزش مفاهیم ریاضی به این شیوه در آثار باستیک و ماتی (۲۰۱۴) و ویلیامز (۲۰۱۵) قابل ردیابی است.

جدول ۶ روش‌های تدریس بهینه را جهت توانمندسازی دانش‌آموزان در دستیابی به استانداردهای گفتمان ریاضی تبیین می‌کند.

جدول ۶: استاندارد گفتمان و روش‌های تدریس

اهداف استاندارد گفتمان	روش‌های تدریس
سازمان‌دهی و یکپارچه‌سازی تفکر ریاضی خود از طریق گفتمان	• روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی • یادگیری مشارکتی • الگوهایی تدریسE ۵ یا ۷E
بیان روشن و منسجم تفکر ریاضی خود برای همسالان، معلمان و دیگران	• روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی • یادگیری مشارکتی • روش تدریس ایفای نقش • الگوهای تدریس ۵E یا ۷E
تحلیل و ارزیابی شیوه‌ی تفکر ریاضی و راهبردهای دیگران	• روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی • یادگیری مشارکتی • الگوهای تدریس ۵E یا ۷E
به‌کارگیری زبان ریاضی برای بیان دقیق ایده‌های ریاضی	• روش تدریس گفت‌وگوی سقراطی

استاندارد بازنمایی

استاندارد بازنمایی در آموزش ریاضیات، ظرفیتی را در فراگیران ایجاد می‌کند تا با بهره‌گیری از ابزارهای متنوعی همچون گزاره‌های کلامی، نمادهای جبری، ترسیمات هندسی و مدل‌های فیزیکی، ایده‌های ریاضی را سازماندهی و مدل‌سازی نمایند. این توانمندی با ایجاد پیوند میان بازنمایی‌های مختلف، در نهایت به تعمیق ادراک و ارتقای مهارت حل مسئله منجر می‌گردد (NCTM, 2000). در واقع، دستیابی دانش‌آموزان به مجموعه‌ای از ابزارهای فکری در قالب بازنمایی‌های ریاضی، افق‌های تفکر آنان را به‌طور چشم‌گیری گسترش می‌دهد. با این حال، علی‌رغم حضور همیشگی نمودارها و عبارات جبری در متون درسی، این ابزارها غالباً به غلط به‌عنوان هدف نهایی آموزش داده شده‌اند، در حالی‌که ماهیت اصلی آن‌ها، ایفای نقش به‌عنوان وسیله‌ای برای سازمان‌دهی اندیشه است. استفاده‌ی آگاهانه از بازنمایی‌ها، مفاهیم انتزاعی ریاضی را به اموری عینی و قابل بازاندیشی مبدل می‌سازد. به‌ویژه بازنمایی‌های ابداعی و خلاقانه‌ای که دانش‌آموزان در حین مواجهه با

چالش‌های ریاضی خلق می‌کنند، نقشی حیاتی در درک ابعاد مسئله و مستندسازی مسیر حل آن ایفا می‌نمایند. علاوه بر این، فراگیران در خلال مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی، می‌آموزند که چگونه از متغیرها برای بازنمایی مجهولات و از معادلات، جداول و نمودارها برای تحلیل روابط ساختاری بهره گیرند (NCTM, 2000).

در این راستا، معلمان می‌توانند با اتخاذ روش تدریس درباره‌ی حل مسئله و همچنین نقشه مفهومی، دانش‌آموزان را در دستیابی به اهدافی نظیر «ایجاد و به‌کارگیری نمایش‌ها برای سازمان‌دهی، ثبت و ارتباط ایده‌های ریاضی» و «انتخاب، به‌کارگیری، و تبدیل بازنمایی‌های ریاضی به یکدیگر به منظور حل مسائل» یاری دهند. همچنین، تلفیق روش تدریس از طریق حل مسئله با ا الگوهای تدریس 5E یا 7E، بستری بهینه برای «بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و تفسیر پدیده‌های فیزیکی، اجتماعی و ریاضی» فراهم می‌آورد.

- **روش تدریس نمایشی**

روش تدریس نمایشی، راهبردی آموزشی است که بر ارائه‌ی عینی و عملیاتی مفاهیم استوار است. در این شیوه، فرآیند یادگیری از طریق بازنمایی مستقیم اشیاء، رویدادها، قواعد و توالی فعالیت‌ها صورت می‌پذیرد که می‌تواند به‌صورت تجربی و حضوری یا با بهره‌گیری از رسانه‌های آموزشی تخصصی محقق شود (Syah, 2003). هدف اصلی در این رویکرد، نمایشِ نظام‌مند یک پدیده بر اساس محتوای درسی و تبیین چگونگی تکوین آن است تا از این طریق، فرآیند یادگیری برای فراگیران ملموس‌تر و فهم‌پذیرتر گردد (Ramadhan & Surya, 2017). در این روش، معلم با تکیه بر اصول مشاهده و الگوسازی، مراحل اجرای یک فرآیند یا سازوکار یک پدیده را به‌صورت گام‌به‌گام برای دانش‌آموزان واکاوی می‌کند؛ هدفی که در پی آن، شکاف میان انگاره‌های نظری و کاربردهای عملی به حداقل می‌رسد (Arends, 2014). اثربخشی این روش، پیوندی ناگسستنی با به‌کارگیری هدفمند وسایل کمک‌آموزشی دارد. بر پایه مبانی تکنولوژی آموزشی، ابزارهایی نظیر ماکت‌ها، شبیه‌سازها و چندرسانه‌ای‌های دیداری-شنیداری، با درگیر ساختن حواس چندگانه و تبدیل مفاهیم مجرد به تجربیات عینی، بار شناختی فراگیران را تعدیل کرده و منجر به تثبیت و ماندگاری عمیق‌تر دانش در ساختار ذهنی آنان می‌شوند (Smaldino et al., 2019). روش تدریس نمایشی نیز به عنوان یک شیوه‌ی مکمل، می‌تواند فرآیند خلق و کاربرد نمایش‌ها را برای سازمان‌دهی و انتقال مفاهیم ریاضی و همچنین به‌کارگیری، و تبدیل بازنمایی‌های ریاضی به یکدیگر به منظور حل مسائل در کلاس درس تقویت نماید.

در ادامه، جدول ۷ نسبت میان اهداف استاندارد بازنمایی و روش‌های تدریس بهینه برای تقویت آن‌ها را ترسیم می‌کند.

جدول ۷. استاندارد بازنمایی و روش‌های تدریس

اهداف استاندارد بازنمایی	روش‌های آموزش بازنمایی
ایجاد و به‌کارگیری از بازنمایی‌ها برای سازماندهی، ثبت، و ارتباط ایده های ریاضی	• روش تدریس نمایشی • نقشه مفهومی • تدریس درباره‌ی حل مسئله: - چارچوب حل مسئله‌ی پولیا (۱۹۴۵) • - چارچوب حل مسئله‌ی شونفلد (۱۹۸۵) • - چارچوب حل مسئله‌ی میسن، برتون و استیسی(۱۹۸۲) • تدریس به‌وسیله حل مسئله
انتخاب، به‌کارگیری، و تبدیل بازنمایی‌های ریاضی به یکدیگر به منظور حل مسائل	• تدریس درباره‌ی حل مسئله: • - چارچوب حل مسئله‌ی پولیا (۱۹۴۵) • - چارچوب حل مسئله‌ی شونفلد (۱۹۸۵) • - چارچوب حل مسئله‌ی میسن، برتون و استیسی(۱۹۸۲) • روش تدریس نمایشی • نقشه مفهومی
استفاده از از بازنمایی‌ها برای مدل سازی و تفسیر پدیده های فیزیکی، اجتماعی و ریاضی	• تدریس از طریق حل مسئله – الگوهای تدریس 5E یا 7E

نتیجه‌گیری

یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که تفکر ریاضی، هنگامی‌که بر مبنای استانداردهای فرایندی فهم و تحلیل شود، نیازمند پشتوانه‌ی روشمند در سطح تدریس است و نمی‌توان انتظار داشت صرفاً با گنجاندن پراکنده‌ی فعالیت‌های مسئله‌محور یا گفت‌وگومدار در متون درسی، این استانداردها به‌طور پایدار در ساختار شناختی دانش‌آموزان نهادینه شوند. تحلیل اسنادی و محتوایی منابع نشان می‌دهد که برای هر یک از پنج استاندارد فرایندی، منظومه‌ای از روش‌ها و الگوهای تدریس وجود دارد که از منظر نظری و تجربی، پتانسیل بالایی برای تقویت این استانداردهای کلیدی دارا هستند.

در حوزه‌ی حل مسئله، تمایز میان تدریس برای حل مسئله، تدریس درباره‌ی حل مسئله، تدریس از طریق حل مسئله و تدریس به‌وسیله‌ی حل مسئله نشان می‌دهد که جهت‌گیری معلم نسبت به مسئله، تعیین‌کننده‌ی غنای تفکر در کلاس درس است. چنان‌چه حل مسئله صرفاً به عنوان ابزاری برای تثبیت آموخته‌ها در پایان درس تلقی شود، دستیابی به سطوح عالی تفکر ریاضی، انتظاری دور از واقعیت خواهد بود. در مقابل، هنگامی‌که مسئله به عنوان پیشران اصلی یادگیری و بستری برای تولید دانش نوین تعریف شده و با چارچوب‌های نظری مستحکمی همچون مدل‌های پولیا، شونفلد و میسن پشتیبانی شود، تمامی اهداف استاندارد حل مسئله از جمله ساخت دانش جدید، انتخاب و سازگار کردن راهبردهای متنوع و تأمل در فرایند حل، در دسترس قرار می‌گیرند.

در خصوص استاندارد پیوند و ارتباطات، نتایج حاکی از آن است که بهره‌گیری از راهبردهایی نظیر پیش‌سازمان‌دهنده‌ها، نقشه‌های مفهومی، تدریس به‌وسیله‌ی حل مسئله و الگوهای ساختن‌گرای 5E و 7E، دیدگاهی شبکه‌ای و منسجم از ریاضیات در ذهن فراگیران ترسیم می‌کند. این رویکرد که با مبانی یادگیری معنادار آزوبل هم‌سویی کامل دارد، شرط لازم برای گذار از حافظه‌محوری به درک عمیق و ماندگار محسوب می‌شود و توانمندی دانش‌آموزان را در انتقال آموخته‌ها به مسائل در ارتباط با علوم دیگر و زندگی روزمره به‌طور چشم‌گیری ارتقا می‌بخشد.

در استاندارد استدلال و اثبات، به‌کارگیری گفت‌وگوی سقراطی، یادگیری مشارکتی و تدریس به‌وسیله‌ی حل مسئله نشان می‌دهد که دانش‌آموزان می‌توانند از مسیر تخصیص، حدس‌ورزی، تعمیم و اقناع، به تدریج جوهره‌ی استدلال را به عنوان رکن بنیادین ریاضیات درک کنند. در این رویکرد، ثبات از قالبی صوری و انتزاعی خارج شده و به مثابه پیامد طبیعی و منطقی کاوش‌های ذهنی و گفت‌وگوهای کلاسی تجلی می‌یابد.

در پیوند با استاندارد گفتمان، هم‌افزایی میان روش سقراطی، یادگیری مشارکتی، ایفای نقش و الگوهای تدریس 5E و 7E، ساختاری منسجم پدید می‌آورد که در آن دانش‌آموزان از موضع شنونده‌ی منفعل به جایگاه تولیدکننده و نقادِ ایده‌های ریاضی ارتقا می‌یابند. این سازوکار، علاوه بر تقویت شفافیت و انضباط در بیان ریاضی، منجر به صیقل خوردن زبان تخصصی فراگیران می‌گردد؛ امری که گفتمان را به نقطه‌ی تلاقی و کانون هم‌گرایی سایر استانداردهای فرایندی همچون استدلال، اثبات و بازنمایی مبدل می‌سازد.

سرانجام، در قلمرو استاندارد بازنمایی، یافته‌ها نشان داد که ترکیب رویکردهای تدریس درباره‌ی حل مسئله، الگوهای 5E و 7E، روش تدریس نمایشی و نقشه مفهومی محرکی قوی برای استفاده‌ی آگاهانه از ابزارهای دیداری، نمادین و مدل‌های هندسی است. این الگوها، بازنمایی را از سطح یک ابزار ساده برای حل تمرین، به سطحی فراتر یعنی ابزاری برای تفکر و مدل‌سازی ارتقا می‌دهند. بدین ترتیب، دانش‌آموز قادر خواهد بود از طریق بازنمایی‌های متکثر، مفاهیم پیچیده را سازمان‌دهی کرده و مسیرهای نوینی برای فهم پدیده‌های ریاضی و برون‌ریاضی خلق نماید.

یکی از دستاوردهای محوری پژوهش حاضر، تبیین این واقعیت است که استانداردهای فرایندی نه به صورت جزیره‌ای، بلکه در قالبی هم‌افزا و درهم‌تنیده عمل می‌کنند؛ برای نمونه، رویکردهای مسئله‌محور به‌طور هم‌زمان قلمروهای حل مسئله، پیوند و ارتباطات، استدلال، گفتمان و بازنمایی را تحت شعاع قرار می‌دهند. بر این اساس، به سیاست‌گذاران آموزشی و طراحان دوره‌های تربیت معلم پیشنهاد می‌شود که از تقلیل مهارت‌های تفکر ریاضی به دسته‌بندی‌های مجزا پرهیز کرده و این توانمندی‌ها را در قالب بسته‌های آموزشی تلفیقی بازتعریف کنند. در این

بسته‌ها، هر هدف فرایندی باید با روش‌های تدریس متناظر شده و در متن سناریوهای آموزشی و طرح‌درس‌های کاربردی تبیین گردد.

از منظر محدودیت‌ها، ماهیت این پژوهش عمدتاً بر تحلیل‌های نظری و اسنادی استوار است؛ لذا عملیاتی‌سازی چارچوب پیشنهادی در محیط واقعی کلاس درس، مستلزم انجام مطالعات تجربی، طرح‌های شبه‌آزمایشی و اقدام‌پژوهی است. در همین راستا، پیشنهاد می‌شود پژوهشگران در مطالعات آتی، اثرات متقابل و ترکیبی روش‌های معرفی‌شده (مانند الگوی 7E همراه با روش سقراطی و ایفای نقش) را بر تکامل استانداردهای فرایندی و پیامدهای تحصیلی فراگیران در مقاطع مختلف تحصیلی به‌صورت تجربی واکاوی کنند. تداوم این مسیر پژوهشی می‌تواند به غنای شواهد تجربی پیرامون نقش میانجی روش‌های تدریس در عینیت‌بخشی به تفکر ریاضی و تحقق استانداردهای فرایندی در نظام آموزشی کمک شایانی نماید.

References

Arends, R. I. (2014). Learning to teach (10th ed.). McGraw-Hill Education.

Bal, A. P. (2014). The examination of representations used by classroom teacher candidates in solving mathematical problems. Educational Sciences: Theory & Practice, 14(6), 2349–2365.

Bal, A. P., & DİNÇ ARTUT, P. (2020). Developing the mathematical thinking Scale: validity and reliability. Cukurova University Faculty of Education Journal, 49(1), 278–315.

Barkley, E. F., Cross, K. P., & Major, C. H. (2014). Collaborative learning techniques: A handbook for college faculty. John Wiley & Sons.

Bostic, J., & Matney, G.T. (2014). Role-playing the Standards for Mathematical Practice: A Professional Development Tool. School of Teaching and Learning Faculty Publications.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Scotter, P. V., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness. Colorado Springs, CO: BSCS.

Bybee, R. W. (2019). Using the BSCS 5E Instructional Model to Introduce STEM Disciplines. Science and Children, 56(6), 8-12.

Brinkmann, A. (2005). Knowledge maps–tools for building structure in mathematics, International Journal for Mathematics Teaching and Learning.

Bruce, J., & Marshah, W. (1990). Models of Teaching (3rd Edition), New Delhi: Prentice-Hall of India Ltd.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. Journal for Research in Mathematics Education, 15(1), 35-49.

Cai, J. (2005). U.S. and chinese teachers' constructing, knowing, and evaluating representations to teach mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 7(2), 135-169.

Chesters, S. D. (2012). The Socratic classroom: Reflective thinking through collaborative inquiry. Sense Publishers.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1994). "Discourse, Mathematical Thinking, and Classroom Practice." In Contexts for Learning: Sociocultural Dynamics in Children's Development. New York: Oxford University Press.

Davidson, N., & Major, C. H. (2014). Boundary crossing: Cooperative learning, collaborative learning, and problem-based learning. Journal on Excellence in College Teaching, 25(3&4), 7-55.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. Educational Studies in Mathematics, 102(3), 435–456.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. School Science & Mathematics, 113(3), 120–134.

English, L. D. (2016). Mathematical Thinking in Problem Solving and Problem Posing. In P. Felmer, R. Goñi, P. M. Kent, & B. Ubilla (Eds.), Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice (pp. 21-34). Springer International Publishing.
Eisenkraft, A. (2003). Expanding the 5E Model. The Science Teacher, 70(6), 56-59.
Fisher, R. (2005). Teaching children to think (2nd ed.). Nelson Thornes.
Gonzales, A.G., Joaquin, M.N.B., & Monterola, S.L.C. (2023). Characterizing the application of mathematical thinking in citizen science. Philippine Journal of Education Studies, 1(1), pp. 110 - 129.
Goos, M., & Kaya, S. (2020). Understanding and promoting students' mathematical thinking: a review of research published in ESM. Educational Studies in Mathematics, 103(1), 7–25.
Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. The American Mathematical Monthly, 87(7), pp.519-524.
Nissa, I. C., Sukarma, I. S., & Sutarto. (2020). Problem-based learning with role-playing: An experiment on prospective mathematics teachers. Beta: Jurnal Tadris Matematika, 13(1), 14-32
Isoda, M. (2012). Introductory Chapter: Problem Solving Approach to Develop Mathematical Thinking. In Isoda, M & Katagiri, S. (Eds.), MATHEMATICAL THINKING: How to Develop it in the Classroom (Vol 1., pp. 1 – 28). World Scientific.
Jackson, P. T., & Walters, J. P. (2000). Role-playing in analytical chemistry: The alumni speak. Journal of Chemical Education, 77(8), 1019-1026.
Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. Educational Researcher, 38(5), 365-379.
Joyce, B., Weil, M., & Calhoun, E. (2015). Models of teaching (9th ed.). Pearson.
Kashfi, H. (2021). The 7E Teaching Model in Mathematics Education. Roshd in Mathematics Education, 39(139).
Kashfi, H. (2022). Problem-Based Teaching Methods in Mathematics Education. Roshd in Mathematics Education, 39(141).
Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. Educational Studies in Mathematics, 96(2), 169–186.
Mogra, I. (2012). Role play in teacher education: Is there still a place for it? TEAN Journal, 4(3). Retrieved from http://bit.ly/AtMwtr
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author.
Neumayr, T., Gasser, L., & Kryspin, T. (2019). Socratic questioning in psychology courses: Effectiveness and student perception. Teaching of Psychology, 46(4), 285-290.
Novak, J. D. (2010). Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations. Routledge.
Novak, J. D., & Cañas, A. J. (2006). The theory underlying concept maps and how to construct them. Florida Institute for Human and Machine Cognition, 1(1), 1-31.
Overholser, J. C. (2011). Psychotherapy according to the Socratic method: Integrating ancient philosophy with contemporary cognitive therapy. Journal of Cognitive Psychotherapy, 25(1), 37-51.
Paul, R., & Elder, L. (2019). The thinker's guide to the art of Socratic questioning. Rowman & Littlefield.
Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.
Poorman, P. B. (2002). Biography and role-playing: Fostering empathy in abnormal psychology. Teaching of Psychology, 29(1), 32–36.
Pratiwi, D J., Siswono, T.Y.E., Neni Mariana, N. (2022). The Role-Playing Problem-Posing Learning to Improve Students' Emotional Intelligence and Mathematics Problem-Solving Skills. International Journal of Recent Educational Research, 3(3), 312-322.
Ramadhan, N., & Surya, E. (2017). The Implementation of Demonstration Method to Increase Students' Ability in Operating Multiple Numbers by using Concrete Object, International Journal of Sciences: Basic and Applied Research (IJSBAR)(2017) Volume 34, No 2, pp 62-68.

Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). A Descriptive Phase Model of Problem Solving Processes. ZDM – Mathematics Education, (53), pp. 737–752

Smaldino, S. E., Lowther, D. L., & Mims, C. (2019). Instructional technology and media for learning (12th ed.). Pearson.

Sandoval, A. (2020). A Meta-Analysis of Graphic Organizer Reading Interventions for Learning Science and Social Studies Content, Department of Teaching and Learning Theses and Dissertations.

Scusa, T. (2008). Five Processes of Mathematical Thinking, Summative Projects for MA Degree.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem-solving. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). Macmillan.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Understanding mathematics via problem solving. In P. Trafton (Ed.), New Directions for Elementary School Mathematics (pp. 31–42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shabani, M. (2015). Methods of teaching. Tehran: Samt publication.

Siddiqui, M. H., & Khan, M. S. (1991). Models of Teaching: Theory and Research, New Delhi: Ashish Publishing House.

Siregar, R., & Siagian, M. (2019). Mathematical Connection Ability: Teacher's Perception and Experience in Learning. Journal of Physics: Conference Series, 1-8.

Slavin, R. E. (1995). Cooperative learning: Theory, research, and practice (2nd ed.). Allyn & Bacon.

Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking.

Syah, M. (2003). Psikologi Belajar. Jakarta: Raja Grafindo Persada.

Tarim, K., & Ökten, S. P. (2014). Mathematical Word-Problems That Require Realistic Answer. Cukurova University Faculty of Education Journal, 43(2), 19–37.

Vale, C., Bragg, L. A., Widjaja, W., Herbert, S., & Esther Yook-Kin Loong. (2017). Children's mathematical reasoning: Opportunities for developing understanding and creative thinking. Australian Primary Mathematics Classroom, 22(1), 3–8.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.

Watson, A. (2001). Instances of mathematical thinking among low attaining students in an ordinary secondary classroom. The Journal of Mathematical Behavior, 20(4), 461–475.

Williams, H., (2015). Role play and mathematics – a problem or a solution?, The MA web site www.m-a.org.uk

Yudariah Mohammad Yusof, Sabariah Baharun, Roselainy Abdul Rahman. (2009). Multivariable Calculus for Independent Learners. Pearson Malaysia Sdn.Bhd.