



An Investigation into Pre-Service Elementary Teachers' Understanding of the Necessity of Deductive Reasoning in Mathematics

Fahimeh Kolahdooz^{*1} , Asiyeh Ebrahimzadeh² , and Hamidreza Kashefi³ 

1. **Corresponding author**, Department of Mathematics Education, Farhangian University, PO Box 889-14665, Tehran, Iran. E-mail: f.kolahdooz@cfu.ac.ir

2. Department of Mathematics Education, Farhangian University, PO Box 889-14665, Tehran, Iran.. E-mail: a.ebrahimzadeh@cfu.ac.ir

3. Department of Mathematics Education, Farhangian University, PO Box 889-14665, Tehran, Iran.. E-mail: hkashefi@cfu.ac.ir

ORCID

Fahimeh Kolahdooz



<http://orcid.org/0000-0003-2783-4219>

Asiyeh Ebrahimzadeh



<http://orcid.org/0000-0002-4684-7640>

Hamid Reza Kashefi



<http://orcid.org/0000-0001-5463-4453>

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Keywords:

- . Pre-service teachers
- . Elementary education
- . Deductive reasoning
- . Mathematical proof
- . Proof scheme
- . Mathematics Education

Background and Objectives: The goal of this study is to examine pre-service elementary teachers' understanding of the necessity of deductive reasoning for proving the truth of mathematical propositions. **Methods:** The study population consisted of 240 female preservice elementary teachers in their fifth semester at a campus of Farhangian University. Among them, 80 participants were voluntarily selected as the sample. The data collection instrument was a researcher-developed questionnaire adapted from Healey and Hoyles (2000). The content validity of the questionnaire was confirmed by experts in mathematics education, and its reliability was assessed using Cronbach's alpha coefficient, which was found to be 0.79, indicating an acceptable level of reliability. Data analysis was conducted using descriptive and inferential statistical methods. **Findings:** The results of this study revealed that a majority of the students encountered difficulties in recognizing the necessity of deductive reasoning. Specifically, some pre-service teachers exhibited a limited understanding of deductive reasoning within the context of mathematical proofs in school settings. Moreover, they often prioritized the appearance of an argument or proof over its substantive content. Moreover, based on Harel and Sowder's model, it can be stated that some of the students participating in this study exhibit different proof schemes in different situations. That is, the reasoning they choose to be convinced of the truth of a mathematical statement differs from the reasoning they use to convince others of the same statement.. **Conclusion:** The findings of this research underscore the imperative of emphasizing the process of deductive reasoning in mathematics education courses for pre-service elementary teachers.

Cite this Article: Kolahdooz F., Ebrahimzadeh, A., & Kashefi, H. R, (2026). An investigation into pre-service elementary teachers' understanding of the necessity of deductive reasoning in mathematics. *The Journal of Theory and Practice in Teachers Education*, 11(21), 1-16. <https://doi.org/10>

بررسی درک دانشجومعلمانی ابتدایی از ضرورت استدلال‌های استنتاجی در ریاضیات

فهیمة کلاه‌دوز^{۱*}، آسیه ابراهیم زاده^۲، حمیدرضا کاشفی^۳

۱. نویسنده مسئول، گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران. رایانامه: f.kolahdouz@cfu.ac.ir

۲. گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران. رایانامه: a.ebrahimzadeh@cfu.ac.ir

۳. گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران. رایانامه: hkashefi@cfu.ac.ir

چکیده

پیشینه و اهداف: هدف مطالعه حاضر آن است که درک دانشجومعلمانی ابتدایی را از ضرورت استدلال‌های استنتاجی برای اثبات درستی گزاره‌های ریاضی بررسی نماید. **روش‌ها:** جامعه آماری شامل ۲۴۰ دانشجو معلم ابتدایی دختر در ترم پنجم یکی از پردیس‌های دانشگاه فرهنگیان بود. از این میان، ۸۰ نفر به صورت داوطلبانه به عنوان نمونه انتخاب شدند. ابزار گردآوری داده‌ها، پرسش‌نامه‌ای محقق‌ساخته با اقتباس از پژوهش هیلی و هوپلز بود که روایی محتوایی آن به تأیید اساتید آموزش ریاضی رسید. پایایی پرسش‌نامه با ضریب آلفای کرونباخ ۰/۷۹ مناسب ارزیابی شد. تحلیل داده‌ها با روش‌های آمار توصیفی و استنباطی انجام گرفت. **یافته‌ها:** نتایج به دست آمده از این مطالعه نشان داد که اغلب دانشجویان در تشخیص ضرورت استدلال‌های استنتاجی با مشکل مواجه هستند. در واقع برخی از دانشجومعلمانی، درک مناسبی از استدلال‌های استنتاجی در فرایند اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای نداشتند و گاهی به ظاهر استدلال و اثبات، بیش از محتوای آن اهمیت می‌دادند. همچنین باتوجه به مدل هارل و ساودر، می‌توان گفت که برخی از دانشجویان شرکت‌کننده در این تحقیق، در موقعیت‌های مختلف، طرح اثبات متفاوتی دارند. یعنی استدلال انتخابی برخی از آن‌ها برای متقاعدشدن از درستی یک گزاره ریاضی با متقاعدکردن دیگران از درستی همان گزاره، متفاوت است. **نتیجه‌گیری:** نتایج این تحقیق، ضرورت توجه به فرایند استدلال استنتاجی را در دروس آموزش ریاضی رشته آموزش ابتدایی نشان می‌دهد.

نوع مقاله: پژوهشی

واژه‌های کلیدی:

دانشجومعلمانی
آموزش ابتدایی
استدلال استنتاجی
اثبات ریاضی
طرح اثبات
آموزش ریاضی

استناد به این مقاله: کلاه‌دوز، فهیمة، ابراهیم‌زاده، آسیه، کاشفی، حمید رضا. (۱۴۰۵). بررسی درک دانشجومعلمانی ابتدایی از ضرورت استدلال‌های استنتاجی در ریاضیات، نظریه و عمل در تربیت معلم، ۱۲(۲۱)، ۱-۱۸.

مقدمه

متخصصان تعلیم و تربیت با تأکید بر اهمیت تفکر اندیشه‌مندانه و منطقی به‌عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز افراد در زندگی، پرورش آن را یکی از هدف‌های اصلی تعلیم و تربیت می‌دانند. براین اساس آنان معتقدند که نظام آموزشی به‌جای انتقال صرف اطلاعات به دانش‌آموزان، باید موقعیت‌های مناسبی را برای پرورش تفکر و توسعه توانایی استدلال منطقی دانش‌آموزان فراهم آورد؛ به‌گونه‌ای که دانش‌آموزان بتوانند مهارت‌های استدلالی خود را توسعه داده و این فعالیت‌ها را با ارزش بدانند؛ در نتیجه به رفاه فردی و اجتماعی برسند (حاجی حسینی‌نژاد و بالغی‌زاده، ۱۳۸۹، Stylianides et al, 2024; Elder, & Paul, 2020; Kuhn, 2008;). یادگیری ریاضی می‌تواند بستر مناسبی را برای توسعه تفکر اندیشه‌مندانه ایجاد نماید. در واقع آشنایی با فرایند استدلال و اثبات در ریاضیات و یادگیری این مهارت‌ها می‌تواند زمینه‌ساز تفکر منطقی در افراد باشد (Stylianides et al, 2024).

قضاوت در مورد درستی یک استدلال، قضیه یا گزاره‌ای در ریاضیات، از فرایندی به نام اثبات نشئت می‌گیرد و بسیاری از محققین آموزش ریاضی، بر این باورند که فرایند استدلال و اثبات در همه پایه‌های تحصیلی برای شناخت و انجام فعالیت‌های ریاضی و توسعه تفکر منطقی ضروری بوده و یکی از ابزارهای مهم در آموزش و یادگیری ریاضیات هستند (کلاهدوز، ۱۳۹۰، ۱۳۹۶؛ شورای ملی معلمان ریاضی^۱، ۲۰۰۰، Stylianides, 2007; Harel, & Sowder, 2007; Ross, 1998; Stylianides & Stylianides, 2008; Arican, 2021; Glassmeyer et al, 2023). البته واضح است که شکل استدلال استنتاجی و اثبات برای دانش‌آموزان در پایه‌های مختلف و باتوجه به دانش آن‌ها متفاوت است. Ross (1998) نیز معتقد است که استدلال، تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارتی اساسی است و برای رسیدن به این هدف، معلم‌ها باید ریاضی را به‌عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش مؤثری در آموزش مدرسه‌ای ایفا می‌کند، در نظر بگیرند. همچنین او بر این باور است که چنانچه دانش‌آموزان فاقد مهارت‌های مرتبط با استدلال باشند، مطالب را حفظ نموده و صرفاً به دنبال رویه‌ها خواهند بود؛ لذا معلمان ریاضی باید تلاش کنند که هر موضوعی را در ریاضیات البته در سطح دانش دانش‌آموزان با دلیل و استدلال منطقی توضیح دهند (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰، Ross, 1998; Stylianids et al, 2017; Stylianids et al, 2024). معلمان باید از فرصت‌های ویژه برای درگیرکردن دانش‌آموزان در فعالیت‌های اثبات آگاه باشند و انواع تکالیف اثبات را شناسایی کنند؛ در غیر این صورت نمی‌توانند به‌خوبی راین اثبات را در بین دانش‌آموزان ترویج و گسترش دهند (Stylianids et al, 2008; Stylianids, 2011; Stylianids et al, 2017; Prediger et al, 2023). نیاز است که معلمان به ماهیت نظری ریاضی که هم بسیاری از موقعیت‌ها را به‌صورت آرمانی تبدیل می‌کند و هم تفسیرهای کاربردی از مفاهیم مجرد می‌سازد، توجه نمایند. دانش و فهمی که معلمان ریاضی از اثبات دارند و همچنین باور آن‌ها در مورد استدلال و اثبات ریاضی می‌تواند نقش مهمی را در فرایند آموزش و یادگیری اثبات و همچنین شکل‌گیری مفاهیم مرتبط با آن در ذهن دانش‌آموزان داشته باشد (Glassmeyer et al., 2023; Arican, 2021; Varghese, 2007). Stylianids and Ball (2008) معتقدند که اگر درک و فهم معلمان از تکالیف اثبات محدود باشد، آنگاه در تدریس شان نیز تنها بر روی تکالیفی که با آن آشنا هستند تأکید می‌نمایند و در نتیجه ممکن است که دانش‌آموزان از تجربه انواع مهم دیگر تکالیف اثبات بی‌بهره بمانند (Stylianids & Ball, 2008; Prediger et al, 2023; Stylianids et al, 2017; Brodie, 2010).

¹. The National Council of Teachers of Mathematics

برخی معلمان، مسائل اثبات را به مواردی که درستی آن‌ها ثابت شده است، محدود می‌نمایند و کمتر روی حدس‌های نادرست کار می‌کنند (Epp, 2016; Kotelawala, 2007). به‌طور کلی اگر هدف یادگیری، افزایش توانایی تفکر، استدلال و حل مسئله باشد، معلمان باید دانش‌آموزان را با انواع تکالیف چالش‌برانگیز مواجه کنند؛ تکالیفی که آن‌ها را تشویق به استدلال، توجیه و شکل‌های پیچیده تفکر نمایند. تکالیفی که تنها شامل رویه‌ها و الگوریتم‌ها هستند، به‌ندرت موجب گسترش تفکر اصیل ریاضیات در دانش‌آموزان می‌شوند (Prediger et al, 2023; Stylianids et al, 2017; Brodie, 2010). علاوه بر این، معلم می‌تواند بعد از انجام فعالیت‌ها و تکالیف مربوط به استدلال و اثبات، با بیان سؤالاتی همچون «می‌توانید توضیح دهید که چگونه به این جواب رسیده‌اید؟» یا «من و همکلاسی‌هایتان را از درستی جوابتان متقاعد کنید»، از یادگیرندگان بخواهد که جوابشان را توضیح دهند. درخواست معلم برای توضیح جواب‌ها حتی اگر اشتباه باشد، بسیار مهم است؛ زیرا عمل «توضیح‌دادن» می‌تواند فرایند تفکر دانش‌آموزان را توسعه بخشد و همچنین موجب می‌گردد که آن‌ها با استدلال‌های یکدیگر آشنا شوند و برای ساخت ایده‌های مفید ریاضی آماده گردند. یکی از مباحثی که در تحقیقات مرتبط با آموزش ریاضی به طور مکرر مورد بررسی قرار گرفته است، توانایی دانش‌آموزان، دانشجویان و معلمان در زمینه استدلال و اثبات ریاضی و عوامل مؤثر بر این توانایی است (به‌عنوان مثال، Glassmeyer & et al, 2023; Chin & Lin, 2009; Eldekçi, 2018; Arican, 2021; Stylianides, 2008; Stylianides; Healy, & Hoyles, 2000; Harel and Sowder, 1998). پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌جومعلم‌ان مقطع ابتدایی با چالش‌های متعددی در درک و تدریس مؤثر اثبات ریاضی روبرو هستند (Glassmeyer et al., 2023; Arican, 2021; Varghese, 2007; 2009). این چالش‌ها پیامدهای منفی برای دانش‌جومعلم‌ان، دانش‌آموزان و به‌طور کلی آموزش ریاضی به همراه دارد. با توجه به نقش کلیدی استدلال‌های استنتاجی در آموزش ریاضی و اهمیت آن در تقویت تفکر منطقی دانش‌آموزان، درک معلمان از ضرورت این مهارت تأثیر مستقیمی بر شیوه‌های تدریس آن‌ها دارد. در سطح آموزش ابتدایی، معلمان نقش مهمی در ایجاد بنیان‌های اولیه استدلال و اثبات دارند. باین‌وجود، پژوهش‌ها نشان می‌دهند که بسیاری از دانش‌جومعلم‌ان ابتدایی درک روشنی از ضرورت استدلال‌های استنتاجی برای اثبات درستی گزاره‌های ریاضی ندارند. آن‌ها گاهی به‌ظاهر اثبات بیشتر از محتوای آن توجه می‌کنند و از استدلال‌های ناقص یا نادرست در تدریس خود استفاده می‌نمایند (به عنوان مثال، Varghese, 2007, 2009; Eldekçi, 2018). بنابراین، پژوهش حاضر با هدف بررسی میزان آگاهی دانش‌جومعلم‌ان ابتدایی از ضرورت استدلال‌های استنتاجی و نقش آن‌ها در فرایند اثبات درستی گزاره‌های ریاضی انجام شده است. به طور شفاف‌تر در پژوهش حاضر به سؤال زیر پاسخ داده می‌شود:

آیا دانش‌جومعلم‌ان ابتدایی از ضرورت استدلال‌های استنتاجی برای ارائه اثبات درستی گزاره ریاضی آگاهی دارند؟

پیشینه پژوهش

یافته‌های به‌دست‌آمده از برخی تحقیقات، نشان می‌دهند که درک و فهم معلمان ریاضی از اثبات و استدلال‌های استنتاجی، بهتر از دانش‌آموزان نیست. به‌طور کلی به نظر می‌رسد که معلمان نقش تأیید را از اثبات می‌پذیرند؛ اما در بین برخی از آن‌ها طرح‌های اثبات تجربی نیز مشاهده می‌شود. حتی برخی از معلمان، آموزش فرایند اثبات را تنها برای تعداد کمی از دانش‌آموزان ضروری می‌دانند و از آنجایی که فهم برخی از آنها از اثبات ریاضی محدود است، مفاهیم مربوط به اثبات را به‌خوبی تدریس نمی‌کنند؛ لذا ضروری است که در برنامه درسی مشخص شود که معلمان تا چه اندازه باید برای تدریس مفاهیم اثبات مجهز به دانش و استراتژی‌های مورد نیاز باشند (Prediger et al, 2023; Stylianids et al, 2017; Harel & Sowder, 2007).

Knuth در یک مطالعه، عملکرد ۱۶ معلم ضمن خدمت را در زمینه اثبات مورد بررسی قرار می‌دهد و به این نتیجه می‌رسد که معلمان، اثبات را به عنوان ابزاری برای گسترش فهم ریاضی ضروری نمی‌دانند و درک و فهم محدودی از اثبات و کارکردهای آن در کلاس درس دارند (Varghese, 2007). نوس دلیل عمده این عدم توانایی را ضعف در برنامه آموزشی معلمان در دوران دانشجویی می‌داند و بیان می‌کند که برای توسعه مهارت‌های اثبات دانشجویان به دو مورد باید توجه شود؛ یکی دانشکده‌های ریاضی که مسئولیت اصلی آماده کردن معلمان ریاضی را دارند و دیگری مدارس که مفاهیم اثبات در ذهن دانش‌آموزان، ابتدا از این مکان شروع به شکل‌گیری می‌کند. Varghese (2007) نیز درک و توانایی دانشجومعلمان را در ساخت اثبات ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهد. مطالعه او بر اساس سه عامل است که عبارتند از: ۱- معنای اثبات ۲- ایده‌هایی در مورد روش‌های تدریس اثبات ۳- ایده‌هایی در مورد استفاده از اثبات در کلاس درس ریاضی.

او در مطالعه خود به این نتیجه دست یافت که درک و فهم دانشجومعلمان از اثبات ریاضی محدود و ضعیف است و بیشتر شرکت‌کنندگان در این مطالعه، کارکرد و معنای اثبات را در حد تأیید و تصدیق گزاره‌های ریاضی می‌دانستند و تنها یک نفر از آن‌ها هدف اثبات را به عنوان توضیح نیز مشخص نمود. حتی برخی از دانشجومعلمان معتقد بودند که اثبات تنها باید به دانش‌آموزانی آموزش داده شود که می‌خواهند در آینده در ریاضیات پیشرفته، تحصیل کنند. Varghese (2007) مشاهده نمود که اغلب دانشجومعلمان، مفهومی رسمی و البته بی‌معنا از اثبات داشتند. در نتیجه او معتقد است که باید روی آموزش معلمان سرمایه‌گذاری بیشتری کرد.

همان‌طور که می‌دانیم محیط آموزشی کلاس درس و دیدگاه معلمان از اثبات می‌تواند نیاز دانش‌آموزان را به دانستن اینکه چرا بعضی چیزها بدین‌گونه هستند، افزایش یا کاهش دهد. به عنوان مثال اگر دیدگاه عمومی معلمان این باشد که ریاضیات مجموعه‌ای از رویه‌هاست، این نگاه می‌تواند محیطی را فراهم نماید که «به یاد سپاری» و «حفظ کردن» به جای «فهمیدن» گسترش یابد. در اینجا می‌توان به نقش معلم در ایجاد محیطی که دانش‌آموزان بتوانند آزادانه در آن به ارائه حدسیات خود بپردازند، پی برد (Kotelawala, 2007). Harel, & Sowder (1998, 2007)، برای بررسی درک و فهم دانشجویان از اثبات، از اصطلاح «طرح اثبات»^۱، استفاده می‌نمایند. این اصطلاح اشاره به توجیهات و دلایلی دارد که یک فرد برای متقاعد کردن خود و دیگران به منظور تأیید یا رد یک گزاره از آنها استفاده می‌کند. Harel (2008) بر این باور است که «اثبات»، استدلالی ویژه است که شخص آن را برای متقاعد کردن خودش یا دیگران در مورد صحت و درستی یک گزاره ارائه می‌دهد، درحالی که «طرح اثبات»، یک ویژگی و مشخصه شناختی جامع از اثبات‌هایی است که فرد ارائه می‌دهد. در واقع Harel (2008) معتقد است که محصول عمل «ثابت کردن»، «اثبات» است و مشخصه شناختی آن، «طرح اثبات» می‌باشد. Harel, & Sowder (1998, 2007)، در مطالعه خود، طرح‌های اثبات دانشجویان را به سه دسته کلی تقسیم می‌کنند که عبارتند از: ۱- طرح‌های اثبات متقاعد کننده بیرونی^۲ ۲- طرح‌های اثبات تجربی ۳- طرح‌های اثبات تحلیلی (استنتاجی). در ادامه به توضیح هر کدام از دسته‌ها خواهیم پرداخت.

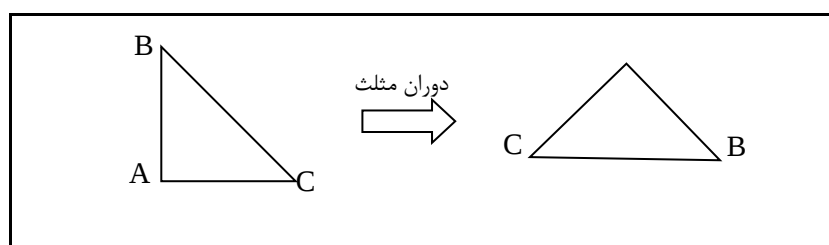
۱) طرح اثبات متقاعد کننده بیرونی: Harel, & Sowder (1998, 2007)، معتقدند، موقعی که جنبه صوری و رسمی ریاضیات در زمان نامناسب در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای تأکید می‌شود، دانش‌آموزان به این باور می‌رسند که تشریفات، قالب و شکل ظاهری، فرایند توجیه و استدلال ریاضی را می‌سازند. همچنین وقتی دانش‌آموزان برای حل مسأله صرفاً فرمول‌هایی را به کار می‌برند، آن‌ها در بیشتر مواقع یاد می‌گیرند به جای اینکه اثبات‌ها را ایجاد و یا کشف

¹ Proof Scheme

² External Conviction

نمایند، آن‌ها را حفظ کنند. علاوه بر این، هنگامی که معلم و کتاب درسی تنها منابع دانش هستند، احتمال آن کم است که دانش‌آموزان به توانایی خود در ایجاد اثبات‌های ریاضی اعتماد کنند. این عادات یادگیری که به صورت باور در می‌آیند، به تشکیل طرح‌های اثبات متقاعد کننده بیرونی منجر می‌شوند.

۲) **طرح اثبات تجربی**^۱: در این طرح، گزاره‌ها از طریق مثال‌ها و حقایق فیزیکی یا تجربه‌های حسی تأیید یا رد می‌شوند. در این طرح، تأیید یا رد یک گزاره و نتیجه‌گیری کلی بر اساس چند مثال یا مورد خاص است و نفوذ آن در بین یادگیرندگان در همه سطوح تحصیلی دیده می‌شود (Epp, 2016; Stylianides & Stylianides, 2008; Harel, & Sowder, 2007; Stylianides, 2007) و به عنوان یک روش معتبر برای اثبات در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین در این طرح، ممکن است فرد بر اساس مشاهدات ادراکی و تصاویر اولیه ذهنی نتیجه‌گیری کند؛ اما این مشاهدات، فاقد توانایی برای تغییر^۲، تبدیل و یا پیش‌بینی نتایج یک تغییر احتمالی است. به عنوان مثال، ممکن است دانش‌آموزی به طور حسی بیان نماید که مثلث ABC در شکل ۱، قائم‌الزاویه است؛ اما پس از دوران شکل نمی‌تواند نوع مثلث را مشخص کند.



شکل ۱. دوران مثلث ABC

شکل ۱. دوران مثلث ABC

Harel, & Sowder (1998, 2007)، بیان می‌دارند که نگرانی آن‌ها در مورد این نیست که دانش‌آموزان کالج یا دانشجویان به طور تجربی فکر می‌کنند، بلکه در مورد این است که طرح اثبات آن‌ها فراتر از این طرح، توسعه نیابد. ۳) طرح اثبات تحلیلی^۳ (استنتاجی): این طرح اثبات از طریق استنتاج منطقی به حدسیه‌ها اعتبار می‌بخشد. در واقع این روش در برگیرنده دنباله‌ای از گزاره‌ها است که با استفاده از قوانین منطقی مناسب استنباط می‌شوند. توجه داشته باشیم حتی موقعی که یادگیرندگان، طرح‌های اثبات تحلیلی (استنتاجی) را به کار می‌برند ممکن است باز هم اشتباهات و خطاهایی انجام دهند. البته این خطاها می‌تواند ناشی از بدفهمی‌ها و یا بی‌دقتی‌های ساده باشد. Harel, & Sowder (1998, 2007)، در تحقیقات خود دریافتند که تعداد کمی از دانش‌آموزان و حتی دانشجویان که در مطالعه آن‌ها شرکت داشتند دارای طرح اثبات تحلیلی (استنتاجی) بودند. Harel, & Sowder (1998, 2007)، معتقدند یک فرد ممکن است که در یک مدت زمان کوتاه، طرح‌های اثبات متنوعی را نشان دهد. Housman (2003) Porter & نیز بیان می‌دارند که هر فردی ممکن است در زمینه‌های مختلف، طرح‌های اثبات متفاوتی داشته باشد. به عنوان مثال، یک ریاضی‌دان حرفه‌ای که دارای طرح اثبات تحلیلی است، ممکن است در مورد برخی از اثبات‌ها دارای «طرح اثبات متقاعد کننده بیرونی» باشد؛ بدین معنی که اگر اثبات از طرف یک شخص (ریاضی‌دان) خاصی ارائه گردد، ممکن است متقاعد شده و اثبات را بپذیرد.

Harel, & Sowder (1998) در مطالعه خود نشان دادند که بیشتر دانش‌آموزان شرکت‌کننده در تحقیق آنها دارای طرح اثبات متقاعد کننده بیرونی و طرح اثبات تجربی هستند. آن‌ها معتقدند از آنجایی که ارزیابی مردم از فرضیه‌ها و وقایع در زندگی روزمره به طور طبیعی به صورت استدلال استقرایی است، استفاده از این دسته از استدلال‌ها در آموزش

¹ Empirical

² Transform

³ Analytical

توسط دانش‌آموزان امری عادی است. البته باید توجه داشت که هرچند استفاده مناسب از استدلال‌های استقرایی در آموزش ریاضیات مدرسه‌ای امری ضروری است (Stylianids, 2007)، اما باید شرایط آموزشی را به گونه‌ای فراهم نمود که دانش‌آموزان به ضرورت استدلال‌های استنتاجی پی برده و طرح اثبات آن‌ها فراتر از طرح اثبات تجربی توسعه یابد. دیدگاه معلمان، به‌ویژه معلمان ابتدایی در مورد اثبات و استدلال استنتاجی، بسیار مهم است؛ زیرا مطالب و مسائل مربوط به اثبات در برنامه درسی دوره ابتدایی محدود است و منبع اصلی تجربه دانش‌آموزان با این مفاهیم، معلم است؛ لذا اگر معلمان، دانش‌آموزان را به این باور سوق دهند که تعداد کمی از مثال‌های خوب انتخاب شده، اثبات را می‌سازد، آنگاه طبیعی است که انتظار داشته باشیم مفهوم اثبات در مقاطع بالاتر تحصیلی برای دانش‌آموزان مشکل باشد (Prediger, 2017; Stylianids et al., 2023; et al., 2017). لذا Stylianids et al. (2017) معتقد است که اگر اثبات در ریاضیات مقطع ابتدایی به عنوان یک مفهوم غیرتجربی معرفی گردد، آنگاه به احتمال زیاد دانش‌آموزان در این مقطع به درک مناسبی از اثبات خواهند رسید، به طوری که در سطوح بالاتر، نیازی به تغییر کلی دیدگاه آن‌ها نسبت به فرایند اثبات نخواهد بود.

روش

نظر به اینکه در این پژوهش به بررسی درک و فهم دانشجومعلمان ابتدایی از اثبات، بدان گونه که هست، پرداخته می‌شود؛ لذا بهترین روش برای رسیدن به هدف مورد نظر، روش توصیفی از نوع زمینه‌یابی است. تحقیق توصیفی شامل جمع‌آوری اطلاعات برای آزمون فرضیه‌ها و یا پاسخ به سؤالات مربوط به وضعیت فعلی موضوع مورد مطالعه است. در پژوهش حاضر، جامعه آماری شامل ۲۴۰ نفر از دانشجومعلمان ابتدایی دختر بود که در ترم پنجم از هشت ترم تحصیلی خود در یکی از پردیس‌های دانشگاه فرهنگیان مشغول به تحصیل بودند. از این میان، ۸۰ نفر که تمایل به همکاری داشتند، به عنوان نمونه انتخاب شدند.

ابزار گردآوری داده‌ها، پرسش‌نامه‌ای محقق ساخته بود که ایده اصلی آن از پژوهش Healy & Hoyles (2000) در انگلستان گرفته شد. روایی محتوایی پرسش‌نامه، توسط تعدادی از اساتید صاحب‌نظر در آموزش ریاضی تأیید شد و ضریب آلفای کرونباخ پرسش‌نامه، ۰٫۷۹ به دست آمد که این مقدار، وضعیت مناسبی را در مورد پایایی پرسش‌نامه نشان می‌دهد. همچنین برای اطمینان از اعتبار تجربی پرسش‌نامه، محقق با مطالعه اسناد و مدارک به مقایسه یافته‌های دیگر با یافته‌های نمونه اولیه از اجرای پرسش‌نامه پرداخت که شباهت‌هایی بین نتایج وجود داشت و تفاوت‌های ظاهر شده نیز به نظر می‌رسید که مربوط به شرایط آموزشی جوامع مختلف باشد. برای تجزیه و تحلیل اطلاعات به دست آمده از روش‌های آمار توصیفی و استنباطی استفاده شده است. در سطح توصیفی از نمره‌گذاری و جدول توزیع فراوانی استفاده گردید. در سطح استنباطی نیز برای بررسی تفاوت معنادار بین پاسخ‌های دانشجومعلمان به دو سؤال پرسش‌نامه (نزدیک به رویکرد خود و دریافت بهترین نمره از استاد) از آزمون کای دو ۱ استفاده شد.

ابزار گردآوری داده‌ها

چارچوب اصلی پرسش‌نامه و ایده اصلی طراحی آن در این پژوهش از پرسش‌نامه تحقیق Healy & Hoyles (2000) در انگلستان گرفته شد. این دو محقق، پرسش‌نامه مربوط به تحقیقشان را در بین دانش‌آموزان کلاس‌های ۸ و ۹ در انگلستان اجرا نمودند. علت انتخاب این پژوهش آن است که اولاً مسئله‌ای را که Healy & Hoyles (2000) در تحقیق خود بیان کرده‌اند، در کتاب‌های ریاضی درسی ایران در مقطع ابتدایی مشاهده می‌گردد. ثانیاً این پرسش‌نامه شامل شکل‌های مختلف اثبات است که با انتخاب هر کدام از آن‌ها به نوعی طرح اثبات دانشجومعلمان نیز مشخص می‌گردد. Harel & Sowder (1998، 2007)، برای بررسی درک و فهم دانشجویان از اثبات، از اصطلاح «طرح اثبات»، استفاده می‌نمایند. این اصطلاح اشاره به توجیهات و دلایلی دارد که یک فرد برای متقاعد کردن خود و دیگران به منظور تأیید یا رد یک گزاره از آن‌ها استفاده می‌کند. لازم به ذکر است که به خاطر محدودیت در تعداد صفحات، پاسخ دانشجومعلمان به بخش اول از پرسش‌نامه ۵ بخشی، مورد بررسی قرار می‌گیرد (پیوست ۱).

بررسی سؤالات پرسش‌نامه

Conner (2007) در پایان‌نامه خود که در مورد بررسی درک و فهم دانشجومعلمان از اثبات است، درک و فهم شخص از اثبات را به معنای توانایی او برای اثبات کردن، تحلیل استدلال‌ها و اظهارنظرها، درک نقش و ضرورت اثبات در

¹ Chi-square test

ریاضیات و درک و فهم مؤثر شخص از اثبات، تعریف می‌نماید. Healy & Hoyles (2000) و همچنین (2009) Chin & Lin در مطالعات خود روی فهم دانش‌آموزان از اثبات، بر اساس موارد زیر تمرکز می‌کنند:

- ۱- استدلال‌هایی که دانش‌آموزان برای رویکرد خود اتخاذ می‌کنند؛ ۲- استدلال‌هایی که آن‌ها برای دریافت نمره خوب از معلم انتخاب می‌کنند و ۳- تعیین اعتبار و قدرت توضیح استدلال‌های مورد نظر توسط دانش‌آموزان.

مطالعه حاضر نیز درک و فهم دانش‌جومعلم‌ان را از اثبات بر اساس موارد زیر مورد بررسی قرار می‌دهد:

- ۱- شناخت و آگاهی دانش‌جومعلم‌ان ابتدایی از استدلال‌های استنتاجی و اثبات‌های ریاضی؛
- ۲- رویکرد آن‌ها در متقاعد کردن خود و استاد از درستی یک گزاره ریاضی؛
- ۳- قدرت تشخیص و تمایز دانشجویان بین اثبات‌های صحیح و استدلال‌های نادرست؛

به‌طور کلی، در بخش اول پرسش‌نامه پژوهش حاضر (جدول ۱)، یک «گزاره ریاضی آشنا» همراه با ۸ استدلال برای تأیید آن داده و از دانش‌جومعلم‌ان خواسته شد که بعد از مطالعه همه استدلال‌ها، در پاسخ به سؤالات مطرح شده در پرسش‌نامه، یکی از استدلال‌ها را بر اساس معیارهای زیر انتخاب کنند:

- ۱- استدلالی که به‌عنوان اثبات به رویکرد آن‌ها نزدیک‌تر است.
- ۲- استدلالی که به‌عنوان اثبات استاد درس مربوطه، به آن بهترین نمره را می‌دهد.

جدول ۱. بخش اول پرسشنامه پژوهش حاضر

تعدادی از دانش‌جومعلم‌ان ابتدایی سعی داشتند که درستی عبارت زیر را ثابت کنند.
«حاصل جمع هر دو عدد زوج، برابر عددی زوج می‌شود.»
پاسخ برخی از این دانش‌جومعلم‌ان برای اثبات درستی عبارت بالا در ادامه، ارائه شده است. پاسخ‌ها را بررسی کنید و سپس به ۲ سؤال زیر جواب دهید:
۱) اگر شما خودتان بخواهید که درستی عبارت فوق را ثابت کنید، کدام یک از پاسخ‌های ارائه شده توسط دانشجویان را انتخاب می‌کنید که به پاسخ شما نزدیک‌تر است؟ دلیل انتخاب خود را توضیح دهید.
۲) از بین پاسخ‌های ارائه شده، یکی را انتخاب کنید که فکر می‌کنید استاد واحد ریاضی به آن بهترین نمره را می‌دهد. (دلیل انتخاب خود را بیان نمایید).

در ادامه، ۸ استدلال ارائه شده در بخش اول پرسش‌نامه با توضیحات مربوط به نوع و شکل استدلال‌ها در پرسش‌نامه، بیان می‌گردد (جدول ۲).

جدول ۲. استدلال‌های ارائه شده در بخش اول پرسشنامه پژوهش حاضر

شماره استدلال	استدلال ارائه شده	توضیح در مورد استدلال ارائه شده
۱	استدلال ۱: فرض می‌کنیم که a و b دو عدد زوج باشند، پس می‌توان آن‌ها را به صورت $b=2n$, $a=2m$ نوشت که k و k' دو عدد صحیح، می‌باشند و داریم: $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$ که $(m+n)$ نیز یک عدد صحیح است، پس $a + b$ ، یک عدد زوج می‌باشد و بدینگونه درستی گزاره ثابت می‌شود.	این پاسخ، از نوع استدلال استنتاجی و منطقی است که به‌صورت رسمی و با استفاده از نمادهای ریاضی و زبان جبری بیان شده است و صحیح است.

۲	مشاهده می‌کنیم که: $۶+۲=۸$, $۴+۴=۸$, $۲+۲=۴$, $۲+۴=۶$, $۴+۲=۶$, $۶+۴=۱۰$, $۴+۶=۱۰$, $۶+۲=۸$, $۲+۶=۸$... پس جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.	این پاسخ به‌صورت ارائه تعداد محدودی از مثال‌ها بیان شده و در تحلیل داده‌ها تحت عنوان پاسخ تجربی و استدلالی غیر اثباتی در نظر گرفته می‌شود که شرایط لازم را برای در نظر گرفتن یک اثبات ریاضی ندارد.
۳	اعداد زوج، اعدادی هستند که بر ۲ بخش‌پذیرند و موقعی که دو عدد زوج را با هم جمع می‌کنیم، می‌توانیم عامل مشترک ۲ را از هر دو عدد فاکتور بگیریم. پس جمع دو عدد زوج نیز بر ۲ بخش‌پذیر است. در نتیجه، جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.	در این پاسخ، علت درستی گزاره، به‌صورت توضیحی و روایت‌گونه بیان می‌شود. در این استدلال، از نمادهای ریاضی و زبان جبری استفاده نمی‌شود و در تحلیل داده‌ها تحت عنوان استدلال روایتی که به‌عنوان اثبات در نظر گرفته می‌شوند، مشخص می‌گردد. در واقع، استدلال ۳، شکل روایت‌گونه استدلال ۱ است.
۴	اگر مانند شکل زیر، اعداد زوج را دوتا دوتا دسته‌بندی کنیم، حاصل جمع نیز به‌صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.	این پاسخ، بر اساس ارائه شکل، درستی گزاره را بررسی می‌کند و در تحلیل داده‌ها تحت عنوان پاسخ دیداری مشخص می‌گردد. این نوع استدلال، منطقی است؛ اما به نظر می‌رسد ارائه چنین استدلالی در مقطع دانشگاه از طرف دانشجویان کافی نمی‌باشد. اما برای دانش‌آموزان ابتدایی به‌عنوان یک استدلال منطقی و استنتاجی قابل قبول است.
۵	رقم یکان اعداد زوج، یکی از ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ می‌باشد. موقعی که ما دو عدد زوج را با هم جمع می‌کنیم جواب نیز به یکی از ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ ختم می‌شود. پس جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.	این پاسخ نیز مانند پاسخ شماره ۳، علت درستی گزاره، به‌صورت توضیحی و روایت‌گونه بیان می‌شود. این استدلال، شکل روایت‌گونه استدلال ۴ است.

ادامه جدول ۲

شماره استدلال	استدلال ارائه شده	توضیح در مورد استدلال ارائه شده
۶	فرض می‌کنیم که x یک عدد فرد باشد، پس $x-1$ و $x+1$ اعداد زوج هستند و در نتیجه داریم: $(x+1) + (x-1) = 2x$ در نتیجه، جمع دو عدد زوج، عددی زوج است.	این استدلال که تحت عنوان استدلال صوری در نظر گرفته می‌شود، به‌صورت رسمی و با استفاده از نمادهای ریاضی و زبان جبری بیان شده است، اما عمومیت ندارد؛ بدین معنا که در این استدلال درستی گزاره مورد نظر، برای اعداد زوج متوالی نشان داده شده است، نه همه اعداد زوج.

۷	فرض می‌کنیم، a یک عدد زوج باشد، پس عدد زوج بعدی، $a + 2$ است و داریم: $a + (a + 2) = 2a + 2 = 2(a + 1)$ پس جمع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود.	این استدلال نیز که تحت عنوان استدلال صوری در نظر گرفته می‌شود، به صورت رسمی و با استفاده از نمادهای ریاضی و زبان جبری بیان شده است و مانند استدلال شماره ۶، اثبات حالت خاصی از گزاره موردنظر را تأیید می‌کند و عمومیت ندارد؛ بدین معنا که در این استدلال، درستی گزاره ریاضی ارائه شده، برای اعداد زوج متوالی نشان داده شده است.
۸	فرض می‌کنیم x و y دو عدد زوج باشند و $z = x + y$، در نتیجه داریم: $\begin{cases} x = z - y \\ y = z - x \end{cases} \rightarrow x + y = z - y + z - x \rightarrow 2z = 2x + 2y$ در نتیجه: $2z = 2x + 2y$ مشاهده می‌کنیم که z بر ۲، بخش پذیر است، در نتیجه، z که حاصل جمع دو عدد زوج می‌باشد، عددی زوج است.	در استدلال شماره ۸، از نمادهای ریاضی اما بدون معنا و مفهوم خاصی استفاده شده است. در واقع، استدلال نادرست و بدون معناست. هدف اصلی از ارائه این استدلال در قسمت استدلال‌های صوری این است که بررسی شود دانش‌آموزان تا چه اندازه بین محتوا و شکل استدلال‌های ارائه شده تمایز قائل می‌شوند.

یافته‌ها

سؤال پژوهش: آیا دانشجومعلم‌ان ابتدایی از ضرورت استدلال‌های استنتاجی برای ارائه اثبات درستی گزاره ریاضی آگاهی دارند؟

پاسخ دانشجومعلم‌ان ابتدایی به سؤال ۱ و ۲ در بخش اول در پرسش‌نامه می‌تواند تا اندازه‌ای پاسخگوی این سؤال پژوهش باشد. لذا ابتدا در جدول ۳، فراوانی پاسخ دانشجومعلم‌ان، به این دو سؤال پرسش‌نامه ارائه می‌گردد.

جدول ۳. فراوانی پاسخ دانشجومعلم‌ان به سؤالات ۱ و ۲ پرسش‌نامه

سؤال ۲ دریافت بهترین نمره از استاد		سؤال ۱ نزدیک به رویکرد دانشجومعلمان		استدلال انتخاب شده
درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	
۳۰	۲۴	۳۰	۲۴	استدلال شماره ۱ (صوری)
۲،۵	۲	۲۶،۲۵	۲۱	استدلال شماره ۲ (تجربی)
۷،۵	۶	۸،۷۵	۷	استدلال شماره ۳ (روایتی)
۳،۷۵	۳	۱،۲۵	۱	استدلال شماره ۴

(دیداری)				
استدلال شماره ۵ (روایتی)	۹	۱۱,۲۵	۶	۷,۵
استدلال شماره ۶ (صوری)	۹	۱۱,۲۵	۱۰	۱۲,۵
استدلال شماره ۷ (صوری)	۷	۸,۷۵	۲۱	۲۶,۲۵
استدلال شماره ۸ (صوری)	۲	۲,۵	۸	۱۰

همان گونه که در جدول ۳ مشاهده می شود، تقریباً یک چهارم از دانشجویان، استدلال شماره ۲ (تجربی) یعنی مثال ها را برای اثبات گزاره مورد نظر، نزدیک به رویکرد خود می دانند. استدلال های صوری نیز در مجموع، ۵۲,۵ درصد از انتخاب دانشجویان را در سؤال ۱ به خود اختصاص می دهند که ۳۰ درصد آن مربوط به استدلال صوری درست (شماره ۱) می باشد. علاوه براین، پاسخ های روایتی (شماره های ۳ و ۵) که هر دو صحیح هستند، توسط ۲۰ درصد از دانشجویان انتخاب شده اند و پاسخ دیداری (شماره ۴) کمترین درصد انتخاب دانشجویان را به خود اختصاص داده است (۱,۲۵ درصد). همچنین در جدول ۳ مشاهده می گردد که درصد انتخاب استدلال های صوری توسط دانشجویان برای دریافت بهترین نمره، بیشتر از بقیه استدلال ها در این سؤال می باشد (۶۰ درصد) که ۳۰ درصد آن مربوط به پاسخ صوری درست است. همچنین ۳۳,۷۵ درصد دانشجویان استدلال های روایتی را که به عنوان استدلال استنتاجی صحیح، در نظر گرفته می شوند، در پاسخ به سؤال ۲ انتخاب می نمایند. استدلال شماره ۲ یعنی مثال ها نیز کمترین درصد انتخاب دانشجویان را برای دریافت بهترین نمره از استاد به خود اختصاص داده است.

همچنین برای بررسی تفاوت معنادار بین پاسخ های دانشجومعلمان به دو سؤال پرسش نامه (نزدیک به رویکرد خود و دریافت بهترین نمره از استاد) از آزمون کای دو^۱ استفاده شد. جدول ۴، نتایج آزمون آماری را نشان می دهد.

جدول ۴. نتایج آزمون کای دو

مقدار	شاخص
۲۶۷/۲۷	Chi-square
۰/۰۵	p-value

مقدار آماره کای دو، برابر با ۲۶۷,۲۷ به دست آمده است. این مقدار آماره، نشان دهنده میزان انحراف مشاهده شده در داده ها نسبت به توزیع مورد انتظار در شرایط فرض صفر است. همچنین مقدار p بسیار کوچک (۰.۰۵) است. این

^۱ Chi-square test

مقدار نشان می‌دهد فرض صفر (عدم تفاوت معنادار) رد می‌شود. به عبارت دیگر، تفاوت مشاهده شده بین پاسخ‌های دانشجومعلم‌ان به دو سؤال از پرسش‌نامه، از نظر آماری معنادار است. نمونه‌ای از پاسخ دانشجویان در جدول ۵ ارائه می‌گردد.

جدول ۵. نمونه‌ای از پاسخ دانشجومعلم‌ان به ۲ سوال بیان شده در بخش اول پرسش‌نامه

نمونه ۱:
۱- استدلال ۱، چون به روش ریاضی، ساده توضیح داده است.
۲- استدلال ۱، چون منطقی تر و پیشرفته تر به نظر میرسد.
نمونه ۲:
۱- استدلال ۲، به واضح ترین و ساده ترین شکل گزاره را ثابت میکند
۲- استدلال ۱، زیرا از فرمول در سطح دانشگاه استفاده شده و فرمول پیچیده ای ندارد و برای دانشجو هم قابل درک است.
نمونه ۳:
۱- استدلال ۲، راحت تر و ملموس تر و در زمان کوتاه، قابل اثبات است.
۲- استدلال ۳، زیرا کامل تر است و ریاضی تر عنوان شده و شامل بخش پذیری و فاکتور گرفتن است.
نمونه ۴:
۱- استدلال ۵، ساده، قابل فهم و منطقی است.
۲- استدلال ۷، چون با عملیات ریاضی نشان میدهد.

پس از بررسی انتخاب استدلال توسط دانشجویان و بیان دلایل این انتخاب‌ها در دو سؤال پرسش‌نامه، این نتیجه حاصل گردید که در سؤالات نزدیک به رویکرد آن‌ها برای متقاعد شدن خودشان، صرف‌نظر از پاسخی که دانشجویان انتخاب نموده‌اند، دلیل «ساده و قابل فهم بودن» در بین همه دلایل ذکر شده از عمومیت بیشتری برخوردار است. همچنین در سؤال‌های مربوط به دریافت بهترین نمره از استاد نیز با صرف‌نظر از پاسخ‌های انتخابی، دلایل زیر از عمومیت بیشتری برخوردار هستند:

«دقیق و منطقی است»، «بر اساس روش استاد در کلاس است»، «از فرمول استفاده نموده است». در ادامه، پاسخ دانشجویان به سؤالات پرسش‌نامه در پژوهش حاضر و مشابهت یا تفاوت این پاسخ‌ها با عملکرد دانشجومعلم‌ان در برخی از تحقیقات دیگر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

بحث و نتیجه‌گیری

بررسی درک و فهم دانشجومعلم‌ان از مفاهیم یا فرایندهای مختلف ریاضی می‌تواند مواردی را که شاید از نظر جامعه آموزشی و برنامه درسی ریاضی مورد غفلت قرار گرفته است، به صورت مشکلات قابل توجهی آشکار نماید. در این راستا، هدف از مطالعه حاضر، بررسی درک و فهم دانشجومعلم‌ان ابتدایی از استدلال و اثبات ریاضی است. در تحقیق حاضر به نظر می‌رسید که باتوجه به پیچیده نبودن گزاره داده شده در پرسش‌نامه، اغلب دانشجویان بتوانند روش‌های اثبات معتبری را برای تأیید درستی گزاره مورد نظر انتخاب کنند؛ اما نتایج نشان داد که اغلب دانشجویان در تشخیص ضرورت استدلال‌های استنتاجی با مشکل مواجه می‌شوند. به عنوان مثال، بسیاری از آن‌ها به جای توجه به محتوای اثبات، بیشتر به ساختار ظاهری آن توجه داشتند و استدلال‌های نمادین را حتی در صورت نادرستی، معتبر تلقی کردند. این واقعیت، ضرورت توجه بیشتر به فرآیند استدلال، نه فقط محصول نهایی اثبات را در دروس آموزش ریاضی نشان می‌دهد. همچنین این یافته‌ها بر نیاز به تقویت آموزش استدلال استنتاجی در دوره‌های تربیت معلم تأکید می‌کند تا

معلمان آینده بتوانند مفاهیم اثبات را نه به عنوان یک مهارت مکانیکی، بلکه به عنوان یک ابزار فکری ارزشمند به دانش‌آموزان خود منتقل کنند.

شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰) در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای بیان می‌نمایند که «استدلال و اثبات باید به صورت پایدار در تجربیات ریاضی دانش‌آموزان از پیش دبستان تا پایان پایه دوازدهم باشد» (ص ۵۶). این شورا استاندارد را تحت عنوان استدلال و اثبات معرفی نموده که در توضیح آن، آمده است:

برنامه‌های تدریس و آموزش از پیش دبستان تا پایان پایه دوازدهم باید دانش‌آموزان را قادر سازند تا:

- استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی در ریاضیات بشناسند؛
 - حدسیه^۱ سازی کرده و بتوانند این حدسیه‌ها را مورد بررسی قرار دهند؛
 - ادعاها و اثبات‌های ریاضی را تکمیل کرده و ارزیابی کنند؛
 - روش‌های مختلف استدلال و اثبات را انتخاب نموده و به کار گیرند (ص ۵۶).
- باتوجه به این ۴ توانایی مهم برای دانش‌آموزان نیاز است که ابتدا خود معلمان، استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی در ریاضیات بشناسند و درک عمیقی از استدلال و اثبات داشته باشند و استدلال استنتاجی و اثبات ریاضی را تشریفاتی در نظر نگیرند.

با این وجود، یافته‌های به دست آمده از تحقیقات مختلف، حاکی از آن است که اغلب دانش‌جو معلمان و معلمان ابتدایی با ساختار اثبات‌های جبری و استدلال‌های استنتاجی آشنا نیستند و به خوبی از مفهوم و اهداف اثبات ریاضی آگاهی ندارند (به عنوان مثال، کلاه‌دوز، ۱۳۹۶، Varghese, 2007; Arican, 2021; Eldekçi, 2018; Chin & Lin, 2009; Glassmeyer et al, 2023; 2009). تفاوت در رویکرد دانشجویان برای متقاعد کردن خود و استاد ریاضی نیز می‌تواند بیانگر این موضوع باشد؛ زیرا هنگامی که شخصی درستی یک گزاره را به طور منطقی می‌پذیرد، این منطق برای او در شرایط مختلف دانشگاهی تغییر نمی‌کند. علاوه بر این، از آنجایی که برخی از دانشجویان در پرسش‌نامه، استدلال‌های نادرست را به عنوان اثبات پذیرفته بودند، به نظر می‌رسد که آن‌ها ملاک‌های مورد قبول برای پذیرش یک استدلال منطقی را به عنوان یک اثبات نمی‌دانند. در ضمن دلیل انتخاب برخی از دانشجویان در پاسخ به سؤال ۱، بیانگر آن است که برخی از آن‌ها، اثبات را به شکل جملاتی که درستی مطلب را نشان می‌دهد و آن‌ها را متقاعد می‌نماید، فرض می‌کنند؛ حال این بیان درستی به صورت نتیجه‌گیری از قوانین منطقی ریاضیات باشد یا اینکه به صورت مثالی باشد که درستی گزاره مورد نظر را تأیید می‌کند. در واقع به نظر می‌رسد که برخی دانشجویان، متقاعد شدن خود را بر اعتبار اثبات، مقدم می‌دانند. همچنین بر اساس پاسخ دانشجویان به سؤالات پرسش‌نامه مشاهده نمودیم که برخی از آن‌ها نمی‌توانند به خوبی بین محتوا و شکل اثبات تمایز قائل شوند و استدلال‌های صوری نادرست را تنها به خاطر ظاهر نمادین آن برای دریافت بهترین نمره از استاد انتخاب می‌نمایند. برخی از آنان نیز به خاص بودن شرایط استدلال و محدودیت آن توجه نداشته‌اند و استدلال‌هایی را برای اثبات گزاره‌های مورد نظر انتخاب کرده‌اند که به طور کلی (عام) درستی گزاره مورد نظر را ثابت نمی‌کند. قابل توجه است که بین رویکرد دانشجویان در متقاعد کردن خود و دیگران نیز تفاوت وجود دارد. همان گونه که مشاهده نمودیم در بخش اول پرسش‌نامه، درصد انتخاب استدلال‌های صوری توسط دانشجویان برای دریافت بهترین نمره از استاد نسبت به رویکرد آن‌ها برای متقاعد کردن خود افزایش می‌یابد و اغلب آن‌ها دلیل انتخاب خود را این گونه بیان می‌نمایند که این استدلال‌ها نمادین و منطقی هستند و به روش استاد و کتاب نزدیک‌ترند. لازم به ذکر است که

¹. conjectures

بررسی دقیق دلایل عملکرد دانشجویان و چگونگی تفکر آن‌ها در موقعیت‌های مختلف اثبات و استدلال، به تحقیقات بیشتری در زمینه‌های ریاضی و روان‌شناختی نیازمند است. با این وجود تفاوت بین رویکرد دانشجویان در متقاعد کردن خود از درستی گزاره مورد نظر و دریافت بهترین نمره از استاد می‌تواند به چند صورت تفسیر شود. از جمله اینکه:

۱- اغلب دانشجویان معلمان از محدودیت استدلال‌های نادرست برای اثبات گزاره‌های ریاضی آگاهی دارند ولی برای متقاعد کردن خود آنچه را که ترجیح می‌دهند، انتخاب می‌نمایند.

۲- آن‌ها به خوبی از محدودیت استدلال‌های غیر استنتاجی مطلع نیستند و تنها بر این باورند که استدلال‌های غیر صوری نمره خوبی از استاد دریافت نمی‌کنند.

دانشجومعلم‌ان باید شرایط استفاده از انواع استدلال‌ها را بدانند و به خاص یا عام بودن استدلال پی ببرند. به عنوان مثال، آن‌ها باید به این نکته دست یابند که می‌توان برای درک بهتر یک گزاره ریاضی، چند مثال را مورد بررسی قرار داد. ولی باید بدانند که تمام آنچه به آن‌ها نشان داده شده است، تنها مربوط به همان حالت‌های خاص است و تا زمانی که نتیجه به طور کلی به اثبات نرسیده است، این مثال‌ها تنها شاهی برای یک حدس هستند (Ross, 1998). باید به یادگیرندگان گوشزد کرد که شهود و استقرا، اثبات نیستند؛ بلکه انگیزه‌هایی برای اثبات یک گزاره هستند. Ross (1998) معتقد است که واژه «اثبات» و عبارت «این یک اثبات نیست» باید در جای مناسب و به طور هماهنگ با یکدیگر مورد استفاده قرار گیرند. Harel, & Sowder (1998, 2007)، در مطالعه خود برای بررسی درک و فهم دانش‌آموزان و دانشجویان از اثبات، از اصطلاح «طرح اثبات» استفاده می‌نمایند و معتقدند این اصطلاح اشاره به توجیهات و دلایلی دارد که یک فرد برای متقاعد کردن خود و دیگران به منظور تأیید یا رد یک گزاره از آن‌ها استفاده می‌کند.

به طور کلی بر اساس یافته‌های به دست آمده در مطالعه حاضر، می‌توان مشکلات کلیدی شناسایی شده در این پژوهش را به صورت زیر دسته‌بندی کرد؛

۱. اولویت دادن به ظاهر اثبات به جای محتوای آن:

یافته‌های به دست آمده از تحقیقات مختلف، حاکی از آن است که بسیاری از دانشجویان معلمان ابتدایی با ساختار اثبات‌های جبری و استدلال‌های استنتاجی آشنا نیستند و به جای تمرکز بر درستی استدلال، بیشتر به قالب نمادین آن توجه می‌کنند (به عنوان مثال، کلاهدوز، ۱۳۹۶؛ Arican, Chin & Lin, 2009; Eldekçi, 2018; Varghese, 2007, 2009; Glassmeyer et al, 2021, 2023).

۲. تفاوت در رویکرد دانشجویان برای متقاعد کردن خود و استاد:

تحلیل داده‌ها نشان داد که برخی دانشجویان در پاسخ به سؤال پرسش‌نامه، استدلال‌های نادرست را به عنوان اثبات پذیرفته‌اند، زیرا در ارزیابی استدلال‌ها، متقاعد شدن خود را بر اعتبار منطقی آن‌ها مقدم دانسته‌اند.

۳. انتخاب استدلال‌های صوری نادرست برای دریافت نمره بهتر:

نتایج نشان داد که برخی دانشجویان، استدلال‌های صوری نادرست را به دلیل شباهت به روش‌های آموزش داده شده در کلاس، برای دریافت بهترین نمره انتخاب کرده‌اند. این یافته تأکید می‌کند که دانشجویان باید توانایی تمایز بین استدلال صحیح و صرفاً رسمی را تقویت کنند.

بر اساس یافته‌های به دست آمده از تحقیق حاضر و با توجه به مدل Harel & Sowder (1998, 2007)، می‌توان گفت که برخی از دانشجویان شرکت کننده در این تحقیق، دارای «طرح اثبات استقرایی» هستند. زیرا برای تأیید یک گزاره کلی بر اساس چند مثال و مورد خاص متقاعد می‌شوند. همچنین نتایج نشان می‌دهد که طرح اثبات اغلب

دانشجویان شرکت‌کننده در آزمون، در موقعیتی که می‌خواهند استاد خود را متقاعد نمایند به صورت «طرح اثبات متقاعدکننده بیرونی» است؛ زیرا همان‌گونه که مشاهده شد اغلب آن‌ها برای دریافت بهترین نمره از استاد، بیشتر از محتوای اثبات به ساختار رسمی آن توجه می‌کنند (طرح اثبات آیینی) و استفاده از نمادها و زبان جبری را حتی اگر نادرست باشد در ارائه اثبات به منظور دریافت بهترین نمره از استاد، لازم و ضروری می‌دانند (طرح اثبات نمادین و آیینی). Harel & Sowder (1998، 2007)، معتقدند که طرح اثبات دانشجویان می‌تواند در موقعیت‌های مختلف، متفاوت باشد. در مطالعه حاضر نیز مشاهده گردید که طرح اثبات دانشجویان در ارتباط با متقاعدکردن خود و متقاعدکردن استاد ریاضی از درستی یک گزاره ریاضی با یکدیگر متفاوت است. بر اساس یافته‌های تحقیق حاضر و بسیاری از تحقیقات دیگر، می‌توان پیش‌نهادهایی به دانشجویان معلمان، معلمان و اساتید و به‌طور کلی به همه آموز شگران ریاضی ارائه داد:

۱- باید توجه داشت که قبل از ورود به مباحث رسمی اثبات، دانش قبلی و درک و فهم یادگیرندگان در زمینه اثبات و استدلال مورد ارزیابی قرار گیرد و بررسی شود که آیا مفهیمی که آن‌ها در اختیار دارند برای ورود به استدلال‌های منطقی کافی است. به عنوان مثال توانایی دانش‌آموزان یا دانشجویان در استفاده مناسب از تعاریف، برقراری ارتباط بین گزاره‌ها و قضایای ریاضی، آشنایی با نمادها و زبان ریاضی و دانستن ارزش و کاربرد این نمادها، تمایز بین استقرا و استنتاج، منطق و شهود و مواردی از این قبیل می‌تواند پیش‌زمینه‌های لازم برای ورود به مباحث رسمی اثبات‌های ریاضی باشند (Prediger et al, 2023; Stylianidis et al, 2017).

۲- آموز شگر ریاضی باید با طرح‌های اثبات یادگیرندگان آشنا شود و بررسی نماید که آن‌ها بر اساس چه طرح اثباتی عمل می‌کنند. آنگاه روش‌های مناسب برای توسعه تفکر دانش‌آموزان را به کارگیرد (Harel & Sowder, 2007). به عنوان مثال، در مورد دانش‌آموزانی که دارای طرح اثبات استقرایی هستند، معلم می‌تواند با ارائه مثال‌هایی که در ابتدا درست عمل می‌کنند اما در ادامه برای اثبات کلی با شکست مواجه می‌شوند، دانش‌آموزان را از محدودیت‌های این رویکرد آگاه نماید و در عین حال نشان دهد که زبان ریاضی و نمادهای مورد استفاده در فرایند استدلال و اثبات البته به صورت هدفمند و معنادار، جنبه تشریفاتی ندارد بلکه روشی معتبر ساختن این فرایندها می‌باشند (ریحانی، حمیدی و کلاهدوز، ۱۳۹۱؛ Epp, 2016).

۳- آموز شگر ریاضی باید توجه داشته باشد که در آموزش فرایند استدلال و اثبات ریاضی ابتدا یادگیرندگان را با فرایند توجیه و روش‌های متفاوت استدلال آشنا نماید، به گونه‌ای که ضرورت استدلال استنتاجی و محدودیت و شرایط استفاده از استدلال‌های شهودی و استقرایی برای آنها مشخص شود. علاوه بر این، آموز شگر ریاضی باید بتواند از شهود و مثال‌های مناسب در شرایط ضروری به عنوان ابزاری برای فهم بهتر استدلال‌های منطقی استفاده کند (Epp, 2016).

۴- آموز شگر ریاضی باید بداند که ریاضی در جریان ساخته شدن با ارائه ریاضی به صورت یک محصول تمام شده که متکی بر دقت است، متفاوت می‌باشد. به نظر برونر، یادگیری نتیجه نیست و آنچه در فرایند یادگیری اهمیت دارد، حل مسأله و جواب نهایی نیست، بلکه هدف، سازمان‌دهی شناخت یادگیرنده است (Stylianides et al, 2024). از این رو به جای جواب مسأله، فرایندهای درگیر در موقعیت‌های حل مسأله مورد توجه قرار می‌گیرد (کدیور، ۱۳۸۷).

به گفته Schoenfel (1994) یادگیرندگان باید در یک فرهنگ ریاضی رشد کنند که در آن گفتمان (ارتباط)، تفکر و قانع کردن، بخش‌های مهمی از فعالیت‌های ریاضی آنان باشد؛ در این صورت است که اثبات‌ها به عنوان بخش طبیعی ریاضیات آن‌ها دیده می‌شود. در واقع معلمان یا اساتید باید دانش‌آموزان یا دانشجویان را تشویق نمایند تا اصول و مفاهیم را کشف کنند و از پاسخ مستقیم به سؤالات یادگیرندگان خودداری نمایند. همچنین آن‌ها باید اجازه دهند تا یادگیرندگان، روش‌های فهمیدن و تفکر خود را هر چند که ناقص و اشتباه است، ارائه دهند. آنگاه آموز شگر ریاضی باید

به کمک خود یادگیرندگان، درصدد رفع نقایص و اشکالات موجود در توجیه آن‌ها باشد. البته باید در نظر داشت که تدریس به روش اکتشافی آسان نیست. در این روش معلم یا استاد باید انعطاف‌پذیر و صبور باشد. زیرا تدریس با این روش با شتاب‌زدگی و سطحی‌نگری سازگار نیست (کدیور، ۱۳۸۷).

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»



COPYRIGHTS

©2021 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

منابع

حاجی حسینی‌نژاد، غلامرضا؛ بالغی‌زاده، سوسن (۱۳۸۹). تأثیر آموزش مبتنی بر «تدریس برای فهمیدن» بر برنامه‌درسی تجربه‌شده درس تاریخ هنر، فصلنامه مطالعات برنامه‌درسی/ایران، ۱۷، ۵۵-۳۹. <https://www.sid.ir/paper/101068/fa>

کدیور، پروین (۱۳۸۷). روانشناسی تربیتی. (چاپ دوازدهم). تهران: سمت.

کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۰). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد آموزش ریاضی، دانشکده علوم، تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

کلاهدوز، فهیمه (۱۳۹۶). بررسی درک دانشجویان از فرایند اثبات قضایای ریاضی با استفاده از ارزیابی قلم-کاغذی و ارزیابی پویای الکترونیکی. پایان‌نامه دکترا آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی، مشهد، دانشگاه فردوسی.

منابع انگلیسی

- Anapa, Pinar, Samkar, Hatice (2010). Investigation of undergraduate students perceptions of mathematical proof, *Procedia social and behavioral sciences*, 2, 2700-2706, <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.399>.
- Arican, Muhammet. (2021). The development and application of an interview structure on determining preservice mathematics teachers' competence in proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 1-5. <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-021-00388-5>.
- Bayazit, Nermin. (2009). Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof. Unpublished doctoral dissertation, Florida state university. <https://repository.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu:253932/datastream/PDF/view>
- Brodie, Karin (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*, New York: springer, <http://www.springer.com/doi.org/10.1007/978-1-4419-0583-3>
- Chin, Erhtsung, and Foulai Lin . (2009). A Comparative Study on Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra between Taiwan and the UK, *Journal of Mathematics Education*, Vol. 2, No. 2, pp.52. <https://eric.ed.gov/?id=EJ861448>
- Conner, AnnaMarie. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, The Pennsylvania State University university Park. Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*. 40, 487-500. https://etda.libraries.psu.edu/files/final_submissions/393
- Linda Elder & Richard Paul (2020). *Critical thinking: Tools for taking charge of your learning and your life*. Foundation forCritical Thinking. <https://rowman.com/ISBN/9781538136386>.
- Epp, Susanna Samuels. (2016). The role of proof in problem solving. In *Mathematical thinking and problem*

- solving (pp. 257-286). Routledge. <https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781315044613-7/role-proof-problem-solving-susanna-epp>
- Eldekçi, R. (2018). *Proof schemes used by pre-service mathematics teachers*. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 49(5), 753-768. <http://www.ijge.net/index.php/php/article/view/8>
- Glassmeyer, D., Brakoniecki, A., & Amador, J. M. (2023). Comparing Elementary and Secondary Teachers' Robust Understanding of Proportional Reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-023-10437-z>.
- Harel, Guershon (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education*. 40, 487-500. https://mathedseminar.pbworks.com/f/Harel_DNR_ZDM_2008.pdf.
- Harel, Guershon., & Sowder, Larry. (1998). Students' proofs schemes: Results from exploratory studies. In A. Schenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.) , Research in Colligate Mathematics Education III (pg. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society. <https://cir.nii.ac.jp/crid/1572824501184393088>.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.) , Second Handbook of Research on *Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing. <https://mathweb.ucsd.edu/~harel/TowardComprehensivePerspective.pdf>.
- Hanna, Gila & Barbeau, Ed (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge, *ZDM -The International Journal on Mathematics Education*. The Special Issue on Proof , 40, 345-353. <https://mathweb.ucsd.edu/~harel/TowardComprehensivePerspective.pdf>.
- Healy, Lulu. & Hoyle, Celia. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428. <https://inteach.org/upload/ProofConceptioninAlgebra.pdf>.
- Housman, David & Porter, Mary (2003). Proof Schemes and learning strategies of above-average mathematics students *Educational Studies in Mathematics*, 53, 139-158. <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1025541416693>.
- Inglis, Matthew & Pablo Mejia-Ramos (2011). Semantic contamination and mathematical proof: Can a non-proof prove?. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 19-29. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312310000593>.
- Köğçe, Davut; Aydın, Mehmet & Yıldız, Cemalettin (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, 2544-2549. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810004106>.
- Kotelawala, Usha Marie (2007). *Exploring teachers attitudes and beliefs about proving in the mathematics classroom*, Unpublished doctoral dissertation, university of Columbia, Colombia, Retrieved from ProQuest Digital Dissertations. <https://search.proquest.com/openview/43c8404671fe659062e95f26fbfe545c/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750>.
- Kuhn, Deanna (2008). *Education for thinking*. United states of American: Harvard university. <https://books.google.com/books?hl=fa&lr=&id=cRjr71RpI18C&oi=fnd&pg=PP8&dq=Kuhn>.
- Miyazaki, Motomn. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68. <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1003956532587>.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. <https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/7/1/article-p26.xml>.
- Prediger, Susanne., Dröse, Jone., Stahnke, Roxane., & Ademmer, Carolyn. (2023). Teacher expertise for fostering at-risk students' understanding of basic concepts: conceptual model and evidence for growth. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(4), 481-508. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10857-022-09538-3.pdf>.
- Ross, Kenneth Alan. (1998). *Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics*. In A. T. Perez (Ed.) , Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 27-39). <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00029890.1998.12004875>.
- Schoenfeld, Alan Henry. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55-80. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0732312394900353>.
- Stylianides, Andreas J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal for research in mathematics education*, 38(3), 289-321. <https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/38/3/article-p289.xml>.

- Stylianides, Andreas J. (2011). Towards a comprehensive knowledge package for teaching proof: A focus on the misconception that empirical arguments are proofs. *Pythagoras*, 32(1), Art. #14, 10 pages. <https://journals.co.za/doi/abs/10.10520/EJC20939>.
- Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning, *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 103-133. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986060701854425>.
- Stylianides, Andreas.J., & Ball, Deborah Loewenberg. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowing about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 307-332. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-008-9077-9>.
- Stylianides, Gabriel. J., Stylianides, Andreas. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. *Compendium for research in mathematics education*, 237-266. [https://sites.math.rutgers.edu/~jpmejia/files/Stylianides_Weber_\(Compendium\).pdf](https://sites.math.rutgers.edu/~jpmejia/files/Stylianides_Weber_(Compendium).pdf).
- Stylianides, Gabriel. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 47-59. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s11858-023-01518-y.pdf>.
- Varghese, Thomas, (2007). *Student teachers conception of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Canada. <https://ualberta.scholaris.ca/server/api/core/bitstreams/135449f9-fd68-459b-8025-63f035030c48/content>.
- Varghese, Thomas, (2009). Concept Maps to Assess Student Teachers' Understanding of Mathematical Proof. *The Mathematics Educator*, 12 (1), 49-68. https://www.researchgate.net/profile/Thomas-Varghese-/publication/267560074_Concept_Maps_to_Assess.

پیوست ۱

به نام خداوند بخشنده و مهربان

سلام خدمت شما دانشجویان عزیز.

این پرسش‌نامه، صرفاً در راستای آشنایی با نوع تفکر دانشجومعلمان ابتدایی در زمینه استدلال است و نتایج آن نمره‌گذاری نمی‌شود. پس با خیال راحت و البته نزدیک به واقعیت پاسخ دهید.
از همکاری شما سپاسگزاریم.

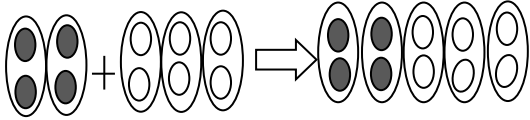
برای اثبات گزاره زیر، استدلال‌هایی در ادامه صفحه، ارائه شده است.

«حاصل جمع هر دو عدد زوج، برابر عددی زوج می‌شود.»

استدلال‌ها را بررسی کنید و سپس به ۵ سوال زیر جواب دهید:

۱- شما برای متقاعدشدن خودتان از درستی گزاره، کدام استدلال را انتخاب می‌کنید؟ چرا؟

۲- اگر بخواهید در امتحان ریاضی، از استاد مربوطه، نمره خوبی بگیرید کدام استدلال را انتخاب می‌کنید؟ چرا؟

استدلال ۲: مشاهده می‌کنیم که: $۴+۴=۸, ۲+۲=۴, ۶+۲=۸, ۲+۴=۶, ۴+۲=۶, ۶+۴=۱۰, ۴+۶=۱۰$ $۶+۲=۸$ و $۲+۶=۸$ پس جمع دو عدد زوج نیز یک عدد زوج می‌شود.	استدلال ۱: فرض می‌کنیم که a و b دو عدد زوج باشند، پس می‌توان آنها را به صورت $a=2m$ و $b=2n$ نوشت که m و n دو عدد صحیح، می‌باشند و داریم: $a + b = 2m + 2n = 2(m+n)$ که $(m+n)$ نیز یک عدد صحیح است، پس $a + b$، یک عدد زوج می‌باشد و بدینگونه درستی گزاره ثابت می‌شود.
استدلال ۴: اگر مانند شکل زیر، اعداد زوج را دوتادوتا، دسته‌بندی کنیم، حاصل جمع، نیز به صورت دسته‌های دوتایی در کنار هم قرار می‌گیرند. پس جمع دو عدد زوج، نیز یک عدد زوج می‌شود. 	استدلال ۳: اعداد زوج، اعدادی هستند که، بر ۲ بخش‌پذیرند و موقعی که دو عدد زوج را با هم جمع می‌کنیم، می‌توانیم عامل مشترک ۲ را از هر دو عدد، فاکتور بگیریم. پس جمع دو عدد زوج، نیز بر ۲ بخش‌پذیر است. در نتیجه، جمع دو عدد زوج، نیز یک عدد زوج می‌شود.
استدلال ۶: فرض می‌کنیم، a یک عدد زوج باشد، پس عدد زوج بعدی، $a + 2$ است و داریم: $a + (a + 2) = 2a + 2 = 2(a + 1)$	استدلال ۵: رقم یکان اعداد زوج، یکی از ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ می‌باشد. موقعی که ما دو عدد زوج را باهم جمع می‌کنیم جواب، نیز به

پس جمع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود.	یکی از ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ ختم می‌شود. پس جمع دو عدد زوج، نیز یک عدد زوج می‌شود.
استدلال ۸: $z = x + y$، دو عدد زوج باشند و x و y فرض می‌کنیم در نتیجه داریم: $\begin{cases} x = z - y \\ y = z - x \end{cases}$ $x + y = z - y + z - x \rightarrow$ در نتیجه: $2z = 2x + 2y$. مشاهده می‌کنیم که z بر ۲، بخش پذیر است، در نتیجه، z که حاصل جمع دو عدد زوج می‌باشد، عددی زوج است.	استدلال ۷: فرض می‌کنیم که x یک عدد فرد باشد، پس $x - 1$ و $x + 1$ اعداد زوج هستند و در نتیجه داریم: $(x + 1) + (x - 1) = 2x$ در نتیجه، جمع دو عدد زوج، عددی زوج است.