



Presenting a Model for Integrating the Commutative Property with Components of Algebraic Thinking in Iranian Elementary Mathematics Textbooks

Reza Ahmadi¹ , Mohammad Bagher Kazemi² , Mohammad Reza Ghaemi³ 

1. Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran.

ahmadireza2071@gmail.com

2. Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran (Corresponding author).

mbkazemi@znu.ac.ir

3. Department of Mathematics, University of Zanjan, Iran. ghaemi@znu.ac.ir

Abstract

Background and Objectives: This study aims to move beyond mere critical analysis toward providing a practical model for the systematic integration of the commutative property with the four key components of algebraic thinking (word problems, patterning, conceptualization of the equal sign, and generalization of arithmetic rules) in Iranian elementary mathematics textbooks.

Method: Employing a mixed-methods explanatory sequential design, the research first conducted a quantitative and qualitative content analysis of all mathematics textbooks for Grades 1 to 6 (2023 edition). To further assess the depth of imbalances in the distribution of components, the Shannon entropy technique was utilized as a complementary quantitative analysis.

Findings: Findings revealed a significant imbalance, with 31.34% of all identified instances concentrated in Grade 3 and only 5.97% in Grade 6. A complementary Shannon entropy analysis also revealed this imbalance. Qualitative analysis uncovered structural weaknesses: a predominant operational view of the equal sign, the reduction of patterning to sequence completion, and an excessive focus on "generalization of arithmetic rules" (59.7%) at the expense of exploratory and relational understanding. In response, this study proposes the design and presentation of a developmental, grade-by-grade integrative model. This model specifies learning objectives, core instructional strategies, and sample activities for each grade and algebraic thinking component, emphasizing continuity, depth, and application.

Conclusion: The study concludes that the current textbook representation lacks a coherent developmental trajectory for fostering algebraic thinking and that the proposed model can serve as a conceptual framework for curriculum revision, teacher guidance, and the design of complementary learning resources.

Keywords: commutative property, algebraic thinking, integrative model, mathematics curriculum planning, content analysis.

Received: 2026/07/02; **Revised:** 2026/09/04; **Accepted:** 2026/09/20; **Published online:** 2026/10/02

Citation: Ahmadi, R., Kazemi, M. B., & Ghaemi, M. R. (2026). From scattered representation to integrated planning: Presenting a model for integrating the commutative property with components of algebraic thinking in Iranian elementary mathematics textbooks. *Research and Innovation in Primary Education*, 8(3), - . <https://doi.org/10.48310/reek.2026.5266>

Publisher: Farhangian University

<https://reek.cfu.ac.ir/>

Article type: Research Article

© 2026 / authors retain the copyright and full publishing rights.



Extended Abstract

Introduction: The elementary school years constitute one of the most critical stages of education, during which the cognitive foundations of mathematical thinking are formed (Shirzadi & Vahidi, 2023). In the field of mathematics education, the transition from an exclusive focus on arithmetic skills to the cultivation of algebraic thinking from the earliest years of schooling has become a central concern for researchers worldwide. This shift stems from the recognition that algebra plays a foundational role in mathematical success (National Mathematics Advisory Panel, 2008). The traditional approach of postponing algebra instruction until secondary school creates a conceptual gap known as the "arithmetic–algebra gap" (Kieran, 2004). In contrast, the gradual integration of algebraic thinking components into familiar arithmetic topics—referred to as generalized arithmetic (Kaput, 2008)—not only bridges this gap but also fosters a deeper understanding of basic concepts themselves.

Recent research in algebraic thinking has emphasized the necessity of attending to cognitive and developmental aspects of this ability. For instance, Sunwoo and Yeo (2025) employed hierarchical factor analysis to demonstrate that elementary students' algebraic thinking comprises multiple dimensions, necessitating the design of tasks appropriate to each developmental level. Similarly, Kim and Kim (2025) conducted a comparative analysis of Korean and American textbooks, revealing significant differences in how pattern generalization tasks are presented—findings that can inspire textbook content revision. Furthermore, Ding et al. (2023) identified multiple pathways for fostering functional thinking in elementary school through their study of Chinese textbooks, emphasizing the richness of learning components during this period.

At the heart of the gradual integration of algebraic thinking components into arithmetic topics lie structural mathematical concepts that express the rules governing relationships between numbers and operations. Among these, the commutative property (for addition and multiplication) is one of the most fundamental. This property is not merely a computational rule but an inferential tool that guides students toward observing structures, justifying strategies, and cultivating a generalizing disposition—the essence of algebraic thinking (Wilkie & Hopkins, 2024).

In elementary mathematics, four components of algebraic thinking are of particular importance: word problems, patterning, conceptualization of the equal sign, and generalization of arithmetic rules (Khosrowshahi & Asghari, 2016). Therefore, the mere presence of the commutative property in textbooks is insufficient; the primary question is whether its representation is purposeful and systematic enough to strengthen these four components. Answering such questions requires a precise analysis of textbook content as the primary educational medium (Dāshteh et al., 2025; Nawrozi et al., 2024). Consequently, the logic of the study's analytical framework can be formulated as follows: the four components provide potential situations for the emergence of algebraic thinking; the commutative property is the shared structural concept among these situations; and generalized arithmetic provides the theoretical basis for transitioning from specific examples to understanding the relationship and general rule. The present study aims to move beyond mere critical analysis toward providing a practical model for the systematic integration of the commutative property with the four key components of algebraic thinking in Iranian elementary mathematics textbooks.

Method: This mixed-methods explanatory sequential study had two phases: (1) quantitative and qualitative content analysis of all six elementary mathematics textbooks (Grades 1–6, 2023 edition) to describe current representation; (2) design of an integrated model based on findings and theory. A complete census was used. The researcher-made protocol included a quantitative checklist (grade, page, section type, operation, format) and a qualitative coding framework with four categories: word problems, patterning, conceptualization of the equal sign, and generalization of arithmetic rules. The unit of analysis was an "instructional situation" meeting three criteria: presence of addition/multiplication, the possibility of inferring a change in order without a change in result, and a sign drawing attention to this relationship. Data were analyzed using descriptive statistics (SPSS 26), thematic analysis based on five cognitive levels (from operational to generalizing), and Shannon entropy to assess distribution across grades. Validity was established through expert review (five specialists), and reliability via independent coding of 30% of situations (87% agreement, Cohen's kappa = 0.87). The model was designed in four stages, integrating theoretical foundations, quantitative distribution, and qualitative depth findings.

Findings: A total of 67 situations were identified. Descriptive indicators are presented in Table 2. The distribution was highly unbalanced: Grade 1 (13.43%), Grade 2 (14.92%), Grade 3 (31.34%), Grade 4 (22.38%), Grade 5 (11.94%), Grade 6 (5.97%). Grades 3 and 4 together accounted for 53.72% of all situations, while Grade 6 had the least. This indicates episodic attention without a developmental trajectory.

Component analysis (Table 4) showed “generalization of arithmetic rules” dominated with 59.7% (40 situations), followed by “conceptualization of the equal sign” (19.4%), “word problems” (14.9%), and “patterning” (6%). Shannon entropy confirmed this imbalance: word problems and patterning had higher importance coefficients (0.181 and 0.387) due to concentrated distribution, while equal sign and generalization had lower weights (0.812 and 0.833). Qualitative analysis revealed structural weaknesses: generalization often involved direct rule transmission after a few examples, with limited conjecture or reasoning; the equal sign was predominantly operational (announcing results) rather than relational; patterning was reduced to sequence continuation; word problems were concentrated in lower grades and rarely asked students to compare orders or explain constancy. The main issue is not just frequency but cognitive depth. The study also proposes a grade-by-grade integrative model that addresses four gaps: distribution, depth, component, and application. In summary, qualitative findings indicate that the main issue is not merely the scarcity of situations but also the manner of their design and their cognitive levels. Therefore, to strengthen the role of the commutative property in developing algebraic thinking, increasing the frequency of situations alone is insufficient; rather, the sequence of activities must move from observation and concrete experience to comparison and explanation of relationships, application, rule discovery, and ultimately generalization in new situations.

Discussion and Conclusion: This study aimed to design an integrated model for systematically incorporating the commutative property with four algebraic thinking components in Iranian elementary textbooks. Findings revealed severe imbalance: over half of all situations were in Grades 3–4, while only 5.97% were in Grade 6; generalization dominated (59.7%), patterning was neglected (6%); the equal sign was mostly operational. Shannon entropy confirmed uneven distribution. These results align with Kaput’s (2008) emphasis on generalized arithmetic requiring movement from specific computations to general structures. The operational view of the equal sign echoes Carpenter et al. (2000), who noted that students interpret the equal sign as a “do something” signal. Neglect of patterning reflects Mason’s (2008) concern that pattern tasks often remain at the level of sequence continuation. The findings support Wilkie and Hopkins’s (2024) call for tasks engaging students in generalizing actions. The theoretical framework integrating Khosrowshahi and Asghari’s (2016) four-component model with Kaput’s (2008) generalized arithmetic perspective proved valuable in revealing the structural gaps in the current curriculum. The four identified gaps—distributional, depth, contextual, and application—highlight the need for a coherent developmental trajectory that systematically integrates the commutative property with algebraic thinking components across all elementary grades. The proposed grade-by-grade integrative model addresses these gaps by specifying learning objectives, core instructional strategies, and sample activities for each grade and component, emphasizing continuity, depth, and application. This model can serve as a conceptual framework for curriculum revision, teacher guidance, and the design of complementary learning resources, as advocated by researchers such as Ding et al. (2023) and Sunwoo and Yeo (2025). Limitations: The model was not empirically validated in classrooms; analysis was limited to textbooks, not classroom implementation; coding involved interpretive judgment despite high reliability. Future research should experimentally test the model’s effectiveness on relational understanding, generalization, patterning, and structural reasoning. Cross-cultural comparisons could further illuminate the integration of structural properties with algebraic thinking.

Ethical Considerations: All ethical principles were observed.

Authors' Contribution: All stages of the research (conceptualization, design, data collection and analysis, writing and revision) were carried out by the authors equally.

Conflict of Interest: The authors declare that there is no conflict of interest.

Funding: This study received no financial support from any organization or institution.

Acknowledgements: The authors are thankful to the reviewers for their helpful comments.

ارائه الگویی برای تلفیق خاصیت جابه‌جایی با مؤلفه‌های تفکر جبری در کتاب‌های ریاضی ابتدایی ایران

رضا احمدی^۱ , محمدباقر کاظمی^۲ , محمدرضا قائمی^۳ 

۱. دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، ایران. Ahmadi.reza2071@gmail.com

۲. دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، ایران (نویسنده مسئول). mbkazemi@znu.ac.ir

۳. استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، ایران. ghaemi@znu.ac.ir

چکیده

زمینه و هدف: پژوهش حاضر با هدف گذار از تحلیل انتقادی صرف به سوی ارائه الگویی کاربردی برای یکپارچه‌سازی نظام‌مند خاصیت جبری جابه‌جایی با چهار مؤلفه کلیدی تفکر جبری (مسائل کلامی، الگویی، مفهوم‌سازی نماد تساوی و تعمیم قوانین حساب) در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی ایران انجام شده است.

روش: این مطالعه با اتکا به چارچوب نظری تلفیقی (ترکیب دیدگاه خسروشاهی و اصغری با نظریه حساب تعمیم‌یافته کاپوت) و با به‌کارگیری روش ترکیبی (تحلیل محتوای کمی و کیفی موضوعی) به بررسی همه‌جانبه کلیه کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول تا ششم (چاپ ۱۴۰۳) پرداخته است. برای سنجش عمق نابرابری در توزیع مؤلفه‌های تفکر جبری، از تکنیک تکمیلی آنتروپی شانون نیز استفاده گردیده است.

یافته‌ها: یافته‌های کمی، الگوی توزیع نامتوازن و نامناسبی را آشکار ساخت که در آن ۳۱/۳۴٪ از کل ۶۷ موقعیت شناسایی شده در پایه سوم و تنها ۵/۹۷٪ در پایه ششم متمرکز شده بود. تحلیل تکمیلی آنتروپی شانون نیز این عدم توازن را آشکار کرد. تحلیل کیفی نیز ضعف‌های ساختاری مهمی را نشان داد: غلبه رویکرد عملیاتی به نماد تساوی، تقلیل الگویی به تکمیل توالی‌ها، و تمرکز افراطی بر مؤلفه «تعمیم قوانین حساب» به بهای غفلت از پرورش تفکر ساختاری و تعمیم‌پذیری. پیشنهاد این پژوهش ارائه الگوی اصلاحی یکپارچه پایه‌به‌پایه است که برای هر پایه تحصیلی و هر مؤلفه تفکر جبری شامل «هدف یادگیری اصلاحی»، «راهنمای آموزشی پیشنهادی» و «نمونه فعالیت عینی» می‌باشد. این الگو بر ایجاد تداوم رشدی، غنی‌سازی بسترهای مغفول و کاربردی کردن خاصیت جابه‌جایی در حل مسئله تأکید دارد.

نتیجه‌گیری: نتیجه نهایی تحقیق بر این امر دلالت دارد که بازنمایی کنونی خاصیت جابه‌جایی فاقد نقشه راه منسجم برای پرورش تفکر جبری است و اجرای الگوی پیشنهادی، برای بازنگری در برنامه‌ریزی درسی، تدوین راهنمای تدریس برای معلمان و طراحی منابع یادگیری، می‌تواند راهگشا باشد.

کلیدواژه‌ها: خاصیت جابه‌جایی، تفکر جبری، الگوی یکپارچه، برنامه‌ریزی درسی ریاضی، تحلیل محتوا.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۴/۱۱؛ تاریخ اصلاح: ۱۴۰۵/۰۶/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۹؛ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۰۷/۱۰

استناد به این مقاله: احمدی، رضا؛ کاظمی، محمدباقر؛ قائمی، محمدرضا. (۱۴۰۵). از بازنمایی پراکنده تا برنامه‌ریزی یکپارچه: ارائه الگویی برای تلفیق خاصیت جابه‌جایی با مؤلفه‌های تفکر جبری در کتاب‌های ریاضی ابتدایی ایران. پژوهش و نوآوری در آموزش ابتدایی، ۸(۳)، ۱-۳۸. <https://doi.org/10.48310/reek.2026.5266>

نوع مقاله: پژوهشی

<https://reek.cfu.ac.ir/>

ناشر: دانشگاه فرهنگیان

۱۴۰۵ © / نویسندگان دارنده حق مؤلف مقاله خود بدون محدودیت هستند.

مقدمه

دوره ابتدایی از حساس‌ترین مراحل تعلیم و تربیت محسوب می‌شود که شکل‌گیری بنیان‌های شناختی در آن صورت می‌پذیرد (شیرزادی و وحیدی، ۱۴۰۲). در حوزه آموزش ریاضی، گذار از تمرکز انحصاری بر مهارت‌های حسابی به سوی پرورش تفکر جبری، از همان سال‌های آغازین تحصیل، در کانون توجه پژوهشگران قرار دارد. این تحول برآمده از درکی است که بر نقش زیربنایی جبر در موفقیت ریاضیاتی تأکید دارد (National Mathematics Advisory Panel, 2008). رویکرد سنتی به تأخیر انداختن آموزش جبر تا دوره متوسطه منجر به ایجاد شکافی مفهومی موسوم به «شکاف حساب-جبر» می‌شود (Kieran, 2004). در مقابل، ادغام تدریجی مؤلفه‌های تفکر جبری در درون مباحث حسابی آشنا، که از آن تحت عنوان حساب تعمیم‌یافته یاد می‌شود (Kaput, 2008)، نه تنها این شکاف را پر می‌کند، بلکه درک عمیق‌تری از خود مفاهیم پایه نیز فراهم می‌آورد.

پژوهش‌های اخیر در حوزه تفکر جبری بر ضرورت توجه به جنبه‌های شناختی و رشدی این توانایی تأکید دارند. برای نمونه، سانوو و یئو (2025) با استفاده از تحلیل عاملی سلسله‌مراتبی نشان دادند که تفکر جبری دانش‌آموزان دوره ابتدایی شامل ابعاد چندگانه‌ای است که طراحی تکالیف متناسب با هر سطح رشدی را ضروری می‌سازد. همچنین، کیم و کیم (2025) نیز در تحلیل تطبیقی کتاب‌های درسی کره و آمریکا تفاوت‌های معناداری را در نحوه ارائه تکالیف تعمیم الگوها آشکار ساختند که می‌تواند الهام‌بخش بازنگری در محتوای کتاب‌های درسی باشد. از سوی دیگر، دینگ و همکاران (2023) در مطالعه‌ای بر روی کتاب‌های درسی چین مسیرهای چندگانه‌ای را برای پرورش تفکر تابعی در دوره ابتدایی شناسایی کردند که بر غنای بسترهای یادگیری در این دوره تأکید دارد.

در کانون رویکرد ادغام تدریجی بسترها و مؤلفه‌های تفکر جبری در درون مباحث حسابی، مفاهیم ساختاری ریاضیات قرار دارند که قوانین حاکم بر روابط بین اعداد و عملیات را بیان می‌کنند. در این میان، خاصیت جابه‌جایی (برای جمع و ضرب) یکی از بنیادی‌ترین مفاهیم است. این خاصیت نه تنها یک قاعده محاسباتی، بلکه ابزاری استدلالی است که دانش‌آموزان را به سمت مشاهده ساختارها، توجیه راهبردها و پرورش نگرش تعمیم‌گرایانه، که جوهر تفکر جبری است، هدایت می‌کند (Wilkie & Hopkins, 2024). خاصیت جابه‌جایی در ریاضیات خاصیتی برای یک عمل دوتایی بین اعضای یک مجموعه است، که تغییر ترتیب اعضا روی عمل انجام‌شده، در نتیجه نهایی مؤثر نباشد. به عبارتی، اگر a و b دو عضو دلخواه این مجموعه باشند و عمل دوتایی بین اعضای مجموعه $+$ باشد، در این صورت رابطه زیر برقرار است (طائری، ۱۳۹۵):

$$a+b=b+a$$

در ریاضی دوره ابتدایی، چهار مؤلفه تفکر جبری، یعنی مسائل کلامی، الگویابی، مفهوم‌سازی نماد تساوی و تعمیم قوانین حساب، حائز اهمیت است (خسروشاهی و اصغری، ۱۳۹۵). بنابراین، صرف وجود خاصیت جابه‌جایی در کتاب‌های درسی کافی نیست، بلکه پرسش اصلی این است که آیا بازنمایی آن به گونه‌ای هدفمند و نظام‌مند انجام شده است که این چهار مؤلفه را تقویت کند؟ پاسخ به این پرسش‌ها مستلزم تحلیل دقیق محتوای کتاب‌های درسی به عنوان اصلی‌ترین رسانه آموزشی است (داشته و همکاران، ۱۴۰۴؛ نوروزی و همکاران، ۱۴۰۳). چارچوب نظری این پژوهش بر تلفیق دو دیدگاه مکمل استوار است. نخست، چارچوب «چهار بستر توسعه تفکر جبری» ارائه‌شده توسط خسروشاهی و اصغری (۱۳۹۵) که مسائل کلامی، الگویابی، مفهوم‌سازی نماد تساوی و تعمیم قوانین حساب را به عنوان بسترهای مناسب برای شکل‌گیری و توسعه تفکر جبری در دوره ابتدایی معرفی می‌کند. دوم، دیدگاه «حساب تعمیم‌یافته» کاپوت (Kaput, 2008) که بر مشاهده و تعمیم ساختارها و روابط موجود در فعالیت‌های حسابی و انتقال آن‌ها از موقعیت‌های عددی خاص به روابط کلی‌تر تأکید دارد.

در این پژوهش این دو دیدگاه نه به عنوان دو چارچوب رقیب، بلکه به عنوان دو سطح مکمل در نظر گرفته شده‌اند: چارچوب چهاربستر، «زمینه‌های بروز» تفکر جبری را مشخص می‌کند، در حالی که حساب تعمیم‌یافته «فرایند گذار از مشاهده یک رابطه در موقعیت خاص به شناسایی و بیان ساختار کلی» را تبیین می‌کند. بر این اساس، چهار مؤلفه یادشده به عنوان مقوله‌های اصلی تحلیل، و خاصیت جابه‌جایی به عنوان یک مفهوم ساختاری مشترک در میان این مقوله‌ها در نظر گرفته شد.

انتخاب خاصیت جابه‌جایی از میان خواص ساختاری حساب بر سه ملاحظه نظری و آموزشی استوار بود. نخست، این خاصیت از جمله ساختارهایی است که در فعالیت‌های جمع و ضرب دوره ابتدایی به صورت طبیعی و مکرر ظاهر می‌شود و بنابراین امکان بررسی آن در کتاب‌های درسی فراهم است. دوم، خاصیت جابه‌جایی رابطه‌ای روشن میان «تغییر ترتیب» و «ثابت ماندن نتیجه» ایجاد می‌کند، از این رو می‌تواند دانش‌آموز را از تمرکز صرف بر اجرای عملیات به مشاهده ساختار و رابطه میان عناصر هدایت کند. سوم، این خاصیت قابلیت بازنمایی در هر چهار بستر مورد مطالعه را دارد: در مسائل کلامی می‌تواند تغییر ترتیب گروه‌ها را آشکار کند؛ در الگویابی می‌تواند در آرایه‌ها و الگوهای متقارن ظاهر شود؛ در مفهوم‌سازی نماد تساوی می‌تواند نمونه‌ای از برابری ساختاری فراهم کند؛ و در تعمیم قوانین حساب می‌تواند از مثال‌های عددی به یک قاعده کلی منتقل شود. بنابراین، خاصیت جابه‌جایی در این پژوهش نه به عنوان تنها مفهوم مهم تفکر جبری، بلکه به عنوان یک «مورد مطالعه ساختاری» برای بررسی امکان پیوند میان بسترهای مختلف تفکر جبری انتخاب شده است.

در نتیجه، منطق چارچوب تحلیلی پژوهش به صورت زیر قابل صورت‌بندی است: بسترهای چهارگانه، موقعیت‌های بالقوه بروز تفکر جبری را فراهم می‌کنند؛ خاصیت جابه‌جایی، مفهوم ساختاری مشترک میان این موقعیت‌هاست؛ و حساب تعمیم‌یافته، مبنای نظری انتقال از مثال‌های خاص به درک رابطه و قاعده کلی را فراهم می‌سازد.

در راستای تبیین مؤلفه‌های تفکر جبری و حساب تعمیم‌یافته و نیز ارتباط آن‌ها با یکدیگر، در ادامه به تشریح و بیان اهمیت هر یک می‌پردازیم و برای هر مؤلفه مثال‌هایی از کتاب‌های درسی در جدول ۷ پیوست ارائه می‌کنیم. جزئیات بیشتر در پژوهش خسروشاهی و اصغری (۱۳۹۵) و زارع و براتعلی (۱۴۰۰) در دسترس است.

مسائل کلامی (به مثابه مدل‌سازی اولیه): مسائل کلامی در حکم نمونه‌های ساده‌شده مدل‌سازی ریاضی و نیز حل مسئله هستند. این مسائل به دانش‌آموزان امکان این را می‌دهند تا با استدلال درباره روابط بین کمیت‌ها، حتی پیش از تسلط بر نمادهای رسمی، پایه‌های اولیه تفکر جبری را در ذهن خود بنا نهند (Carpenter et al., 2000).

الگویابی (از توالی‌های ساده تا تعمیم ساختاری): فعالیت‌های الگویابی در کتاب‌های درسی شامل تکمیل توالی‌ها و شناسایی «عضو بعدی» است و، در رویکرد جبرمحور، الگویابی ابزاری برای کشف قواعد، استخراج روابط و در نهایت تعمیم ساختارها است (Mason, 2008). شرط لازم نیز آن است که حداقل دو نمایش/ترتیب از یک عملیات وجود داشته باشد، تغییر ترتیب عملوندها مشاهده شود و دانش‌آموز از این رابطه به یک الگوی عمومی برسد.

مفهوم‌سازی نماد تساوی (گذار از عمل به رابطه): درک دانش‌آموزان از نماد تساوی (=) یک فرایند تکاملی است. در پایین‌ترین سطح این فرایند، درک عملیاتی قرار دارد که در آن، علامت مساوی صرفاً به معنای انجام محاسبه و گرفتن جواب نهایی تلقی می‌شود. در سطح میانی، درک رابطه‌ای-محاسبه‌ای شکل می‌گیرد که تساوی را به عنوان رابطه هم‌ارزی بین دو طرف می‌پذیرد، اما صحت آن را منوط به انجام محاسبات می‌داند. هدف نهایی رسیدن به درک رابطه‌ای-ساختاری است که در آن، نماد مساوی نشان‌دهنده یک رابطه تعادل و برابری ذاتی بین دو عبارت، مستقل از فرایند محاسبه، است (Carpenter et al., 2000; Knuth et al., 2016).

تعمیم قوانین حساب (گذار از محاسبه خاص به قاعده عام): در حالی که هدف اصلی حساب انجام عملیات بر روی اعداد خاص است، هدف جبر تعمیم و انتزاع این روابط برای استدلال درباره ساختارهای ریاضی است. در این بستر، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا با تأمل بر ویژگی‌های عملیات (مانند خاصیت جابه‌جایی)، که ابتدا در بستر اعداد عینی کشف کرده‌اند، به تدوین قواعدی کلی بپردازند، که فارغ از اعداد خاص، همیشه صادق هستند. این فرایند آن‌ها را از سطح محاسبات عددی فراتر برده و به درک فرایندهای حاکم بر نظام ریاضی رهنمون می‌سازد (Kieran, 2004; Kaput, 2008).

از سوی دیگر، در نظریه «حساب تعمیم‌یافته»، کاپوت به‌طور خلاصه سه درک اصلی برای موفقیت در جبر را برشمرده است: اول، توانایی استفاده از متغیرها برای نشان دادن مجهولات؛ دوم، درک رابطه‌ای نماد تساوی به‌عنوان نشان‌دهنده برابری دو کمیت؛ و سوم، توانایی تشخیص، تولید و تعمیم الگوها به‌صورت نمادین. فرایند تعمیم، که درک چگونگی کاربرد ویژگی‌های یک موقعیت خاص در شرایط گوناگون است، هسته اصلی تفکر جبری را تشکیل می‌دهد. بر این اساس، حساب تعمیم‌یافته، دانش‌آموزان را به توجه به ساختار معادلات، شناسایی الگوها و استفاده آگاهانه از ویژگی‌های ریاضی، مانند خاصیت جابه‌جایی، سوق می‌دهد (Kaput, 2008).

ملاحظه می‌شود که هر دو دیدگاه هم‌پوشانی‌های مفهومی فراوانی با هم دارند و به‌نوعی مکمل یکدیگر برای بهره‌گیری از جبرورزی در ریاضیات دوره ابتدایی هستند. تلفیق این دو دیدگاه چارچوب تحلیلی جامعی می‌سازد که هم بر مؤلفه‌های محتوایی تفکر جبری تمرکز دارد و هم فرایند تعمیم را به‌عنوان هدف غایی دنبال می‌کند.

در این پژوهش میان «اجزای برگرفته از ادبیات نظری» و «اجزای استنتاج‌شده توسط پژوهشگران» تمایز گذاشته شد. چهار بستر مسائل کلامی، الگویابی، مفهوم‌سازی نماد تساوی و تعمیم قوانین حساب، به‌عنوان مقوله‌های اصلی تحلیل، مستقیماً از چارچوب خسروشاهی و اصغری (۱۳۹۵) اخذ شدند. تأکید بر تعمیم، مشاهده ساختار و گذار از فعالیت‌های عددی خاص به روابط کلی‌تر نیز بر مبنای دیدگاه حساب تعمیم‌یافته کاپوت (2008) و مطالعات مرتبط با تفکر جبری در سال‌های اولیه مدرسه قرار گرفت. در مقابل، نحوه عملیاتی‌سازی این مؤلفه‌ها برای شناسایی موقعیت‌های مرتبط با خاصیت جابه‌جایی، معیارهای تحلیل کیفیت بازنمایی‌ها، و توالی پایه‌به‌پایه فعالیت‌های پیشنهادی، استنتاج پژوهشگران از تلفیق مبانی نظری با یافته‌های تحلیل محتوای حاضر است. بنابراین، الگوی پیشنهادی به معنای استخراج مستقیم یک الگوی آماده از منابع پیشین نیست، بلکه حاصل یک فرایند «نظریه» تحلیل وضعیت موجود «شناسایی شکاف» استخراج اصل طراحی «پیشنهاد فعالیت» است.

برای تجمع و نمایش ارتباط بین بسترهای تفکر جبری، نقش محوری خاصیت جابه‌جایی در این پیوند، جزئیات پژوهش‌های مرتبط در جدول ۱ به‌صورت نظام‌مند ارائه شده، و نیز در بخش پیشینه پژوهش تبیین شده است.

پیشینه پژوهش

مطالعات بین‌المللی در دو دهه گذشته، به شکل فزاینده‌ای بر ضرورت شروع زود هنگام تفکر جبری و عبور از رویکرد دوگانه «حساب ابتدایی، جبر متوسطه» تأکید کرده‌اند. این اجماع ریشه در یافته‌های پژوهشی دارد که نشان می‌دهد مواجهه دیر هنگام با مفاهیم جبری به ایجاد شکافی پایدار در درک ریاضیات منجر می‌شود.

پژوهش‌های مروری نظام‌مند، مانند مطالعه سیبگاتولین و همکاران (2022)، به‌وضوح نشان می‌دهد که تمرکز اصلی تحقیقات حوزه تفکر جبری بر مقاطع ابتدایی (۴۴٪) و راهنمایی (۳۶٪) معطوف است. این یافته با دیدگاه‌های نظری پیشگامانی مانند کاپوت (2008) همسو است که بر «حساب تعمیم‌یافته» به‌عنوان رکن اصلی جبر مدرسه‌ای تأکید می‌ورزد. از سوی دیگر، پیتا-پانتازی و همکاران (2025) چگونگی ارتباط عملکرد دانش‌آموزان در تکالیف حسابی را با عملکرد آنان در تکالیف جبری تحلیل نموده‌اند و بر وجود یک پیوستار بین این دو نوع تفکر صحنه گذاشته‌اند.

کنوت و همکاران (2016)، در یک پژوهش مروری با بررسی نظریه تعمیم حساب کاپوت (2008)، سه درک اصلی را برای موفقیت در جبر برمی‌شمارند: ۱) توانایی استفاده از متغیرها برای نشان دادن مجهولات؛ ۲) درک رابطه‌ای نماد تساوی به‌مثابه نشان‌دهنده برابری دو کمیت؛ و ۳) توانایی تشخیص، تولید و تعمیم الگوها به‌صورت نمادین. این مؤلفه‌ها با بسترهای معرفی‌شده توسط خسروشاهی و اصغری (۱۳۹۵) با مؤلفه‌های الگوی کلامی، مفهوم‌سازی نماد تساوی و الگویابی و تعمیم قوانین حساب هم‌پوشانی مفهومی بالایی دارند و در ارتباط هستند. به‌طور مشابه، کی‌رن (2004) فعالیت تعمیم را مؤلفه اصلی تفکر جبری دانسته و بر نقش مفاهیم ساختاری مانند خاصیت جابه‌جایی در تسهیل این فرایند تأکید نموده است. مطالعاتی چون پژوهش کارپنتر و

همکاران (1999) و نیز اسچلیمن و همکاران (1998) به این نکته مهم اشاره کرده‌اند که حتی درک و کاربرد مواردی مانند خاصیت جابه‌جایی، در عمل با چالش مواجه است.

سیبگاتولین و همکاران (2022) نشان دادند که به‌کارگیری فعالیت‌های غیرروتین و معنادار، مانند استفاده از بازی‌های هدفمند (Papadopoulos & Patsiala, 2019)، بازنمایی‌های چندگانه (Kusumaningsih et al., 2018) و تلفیق با مفاهیم هندسی (Apsari et al., 2020) می‌تواند اثربخشی آموزش مفاهیم جبری اولیه را به‌طور قابل توجهی افزایش دهد. این پژوهش‌ها بر این نکته تأکید دارند که انتقال مفاهیم انتزاعی جبر نیازمند خروج از قالب تمرین‌های تکراری و ارائه آن‌ها در قالب موقعیت‌های اکتشافی، ملموس و چالش‌برانگیز است.

در پژوهش‌های داخلی، خسروشاهی و اصغری (۱۳۹۵) چارچوب چهاربستری‌ای را ارائه دادند که سنگ بنای بسیاری از تحلیل‌های بعدی شده است. همچنین، تحلیل‌های محتوایی متعددی در سال‌های اخیر بر کتاب‌های درسی ریاضی ابتدایی صورت گرفته است (راعی و کاظمی، ۱۴۰۴؛ اسکندری و همکاران، ۱۴۰۳؛ داشته و همکاران، ۱۴۰۴) که نتایج جالبی را در بر داشتند. در جدول ۱ چارچوب تحلیلی و جزئیات تلفیق موارد فوق ارائه شده است. این جدول مبنای کدگذاری و تحلیل کیفی محتوای کتاب‌های درسی در ادامه پژوهش خواهد بود. علاوه بر تحلیل کمی مبتنی بر فراوانی، برای سنجش دقیق‌تر میزان اهمیت و وزن هر یک از مؤلفه‌های تفکر جبری در محتوای کتاب‌های درسی، از تکنیک آنالیز شانون استفاده شده است. این روش، که در پژوهش‌های تحلیل محتوای کتاب‌های درسی کاربرد گسترده‌ای دارد (نوروزی و همکاران، ۱۴۰۳؛ رضائی و ظهیری، ۱۴۰۰)، امکان محاسبه «ضریب اهمیت» هر مؤلفه را بر اساس پراکندگی و توزیع آن در پایه‌های مختلف فراهم می‌آورد و به شناسایی عمیق‌تر شکاف‌های موجود در بازنمایی مفاهیم ساختاری کمک می‌کند.

جدول ۱. چارچوب تحلیلی تلفیقی: ارتباط بسترهای تفکر جبری، مؤلفه‌های کلیدی جبر و نقش خاصیت جابه‌جایی

بستر توسعه تفکر جبری (خسروشاهی و اصغری، ۱۳۹۵)	تبیین نظری و مؤلفه‌های کلیدی جبر	نقش و پیوند با خاصیت جابه‌جایی	نمونه‌ای از بازنمایی (وضعیت موجود یا پیشنهادی)
۱. مسائل کلامی	مؤلفه کلیدی: به‌کارگیری متغیرها و مدل‌سازی روابط. تبیین: مسائل کلامی، به‌عنوان موقعیت‌های زمینه‌مند، پایه‌ای برای انتزاع روابط و گذار به نمادگذاری جبری فراهم می‌کنند (Carpenter et al., 2000). به‌ویژه، دینگ و همکاران (2023) بر نقش مسائل کلامی در ایجاد مسیرهای چندگانه برای پرورش تفکر تابعی تأکید دارند.	خاصیت جابه‌جایی، در درون مدل کلامی، قابلیت تغییر دیدگاه را بدون تغییر نتیجه نشان می‌دهد. این امر به درک ثبات رابطه در دل تغییر شکل ظاهری مسئله کمک می‌کند.	وضعیت موجود (پایه اول، ص ۲۸): «علی ۳ مداد و سارا ۵ مداد دارد. آن‌ها با هم چند مداد دارند؟» ارتباط مدل ۳+۵ و ۵+۳ برای یک موقعیت. پیشنهاد توسعه: مسئله‌ای که نیاز به تغییر ترتیب برای ساده‌سازی حل داشته باشد (مانند ترکیب گروه‌های ده‌تایی).

وضعیت موجود (الگویابی بدون خاصیت جابه‌جایی) (پایه سوم، ص ۵۴): عدد بعدی در دنباله ۲، ۴، ۶، ... کدام است؟ پیشنهاد توسعه: فعالیت کشف آرایه‌های مستطیلی معادل 3×4 و 4×3 و استخراج قاعده کلی از آن.	جابه‌جایی، ساختار تقارنی درون برخی الگوهای عددی یا هندسی (مانند آرایه‌های مستطیلی) را آشکار می‌سازد. این امر به تعمیم «بی تأثیر بودن ترتیب» در یک قاعده کمک می‌کند.	مؤلفه کلیدی: تشخیص، تولید و تعمیم الگوها به صورت نمادین. تبیین: الگویابی، فراتر از ادامه دنباله، فرصت کشف قواعد، استقرا و بیان روابط کلی است (Mason, 2008). کیم و کیم (2025) در تحلیل تطبیقی خود نشان دادند که کیفیت تکالیف تعمیم الگوها در کتاب‌های درسی تأثیر مستقیمی بر رشد تفکر تابعی دانش‌آموزان دارد.	۲. الگویابی
وضعیت موجود (پایه دوم، ص ۴۱): تمرین‌های پر کردن جای خالی مانند $5 = 2 + \square$. پیشنهاد توسعه: پرسش‌هایی مانند «آیا عبارت $7 + \square = \square + 7$ همیشه درست است؟ چرا؟» برای تأمل بر ماهیت رابطه.	خاصیت جابه‌جایی، مصداق عینی و ملموس از یک برابری ساختاری است (مثلاً $8 = 5 + 3 = 3 + 5$). تمرکز بر این برابری، درک رابطه‌ای از «=» را تقویت می‌کند.	مؤلفه کلیدی: درک رابطه‌ای نماد تساوی به عنوان بیان برابری دو مقدار. تبیین: گذار از درک عملیاتی (= به معنی «جواب می‌دهد») به درک رابطه‌ای (= به معنی «هم‌ارز است») سنگ بنای جبر است (Carpenter et al., 2000; Knuth et al., 2016).	۳. مفهوم‌سازی نماد تساوی
وضعیت موجود (پایه سوم، ص ۷۸): «در ضرب، می‌توانیم جای دو عدد را عوض کنیم». پیشنهاد توسعه: فرایند هدایت‌شده از کشف مثال‌های متعدد به حدس‌زنی، آزمایش در موارد جدید، و نهایتاً بیان قاعده با نمادها یا کلمات خود دانش‌آموز.	خاصیت جابه‌جایی، نمونه پارادایمی و یکی از مناسب‌ترین قوانین برای آغاز فرایند تعمیم در این سطح است که دانش‌آموزان می‌توانند از دل مثال‌های ملموس تعمیم دهند و به صورت نمادین $a+b=b+a$ بیان کنند.	مؤلفه کلیدی: انتزاع و تعمیم اصول حاکم بر عملیات. تبیین: قلب حساب تعمیم‌یافته (Kaput, 2008) و همان فرایند کلیدی تفکر جبری (Kieran, 2004) است. سیبیا و همکاران (2025) از منظر شناختی نشان داد که سطوح مختلف سؤال‌های جبری در کتاب‌های درسی نیازمند سطوح متفاوتی از توانایی تعمیم هستند.	۴. تعمیم قوانین حساب

با تلفیق یافته‌های مطالعات بین‌المللی و داخلی، شکاف پژوهشی اصلی، که این مطالعه در صدد پر کردن آن است، نمایان می‌شود:

۱. شکاف بین تحلیل و طراحی: عمده مطالعات داخلی موجود (مانند تحلیل‌های محتوایی فوق) و نیز بسیاری از پژوهش‌های بین‌المللی، به توصیف و نقد وضعیت موجود بسنده کرده‌اند. پژوهش حاضر، با هدف طراحی و پیشنهاد الگو، در پی پر کردن این شکاف است.
۲. شکاف بین کل‌نگری و جزئی‌نگری: در حالی که چارچوب‌های کلی تفکر جبری (هم در سطح بین‌المللی و هم داخلی) معرفی شده‌اند، تحلیل عمیق و متمرکز بر نقش یک مفهوم ساختاری مشخص و کلیدی (در اینجا خاصیت جابه‌جایی) در ایجاد پیوند بین آن مؤلفه‌های کلی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. این پژوهش، با انتخاب یک مصداق عینی، تحلیل خود را ملموس و کاربردی می‌سازد.
۳. شکاف در برنامه‌ریزی طولی: در مطالعات بررسی‌شده در این پژوهش شواهد محدودی از ارائه یک نقشه راه پایه‌به‌پایه برای تلفیق نظام‌مند خاصیت جابه‌جایی با مؤلفه‌های تفکر جبری مشاهده شد. این پژوهش می‌کوشد با ارائه «الگوی یکپارچه پایه‌به‌پایه»، این خلأ را پر کند.

این پژوهش سعی دارد از تحلیل صرف وضعیت موجود به سمت پیشنهاد و طراحی راه‌حل برای وضعیت حرکت کند. به بیان دیگر، نتیجه این مقاله صرفاً گزارشی از کاستی‌ها نیست، بلکه ارائه پیشنهادها عینی، مرحله‌ای و قابل اجرا در قالب یک الگوی پایه‌پایه است که می‌تواند به‌عنوان منبعی راهنما برای مؤلفان کتب درسی، برنامه‌ریزان درسی و مربیان تربیت‌معلم مورد استفاده قرار گیرد.

روش

این مطالعه، با توجه به ماهیت مسائل پژوهشی آن که ترکیبی از توصیف وضع موجود (پرسش یکم)، طراحی یک الگو (پرسش دوم) و تبیین دلالت‌های آن (پرسش سوم) است، از یک روش ترکیبی (آمیخته) توضیحی-توسعه‌ای بهره می‌برد. در فاز اول، با استفاده از تحلیل محتوای کمی و کیفی، به توصیف و تفسیر نظام‌مند بازنمایی خاصیت جابه‌جایی در کتاب‌های درسی پرداخته می‌شود. در فاز دوم، مبتنی بر یافته‌های فاز اول و مبانی نظری، الگوی یکپارچه پیشنهادی طراحی و تدوین می‌گردد. این رویکرد دوفازی امکان درک عمیق از کاستی‌های موجود و سپس خلق راه‌حلی هدفمند و مبتنی بر شواهد را فراهم می‌آورد.

جامعه آماری این پژوهش را کلیه کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های اول تا ششم ابتدایی چاپ سال ۱۴۰۳ تشکیل می‌دهند که توسط سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش ایران تألیف و توزیع شده‌اند. با توجه به ماهیت مطالعه و هدف آن، که واکاوی همه‌جانبه محتوای رسمی است، از روش سرشماری کامل استفاده شده و کلیه شش جلد کتاب به‌عنوان نمونه پژوهش مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. این امر موجب می‌شود یافته‌ها عاری از خطای نمونه‌گیری باشند و نمای کاملی از وضعیت موجود ارائه دهد.

ابزار اصلی گردآوری داده‌ها، پروتکل تحلیل محتوای محقق‌ساخته بود که شامل دو بخش اصلی می‌شد: ۱. فهرست واری (چک‌لیست) کمی: برای ثبت نظام‌مند اطلاعات توصیفی، همچون پایه تحصیلی، شماره صفحه، نوع بخش کتاب (فعالیت، کار در کلاس، تمرین، مسئله کلامی، و...)، عملیات موردنظر (جمع یا ضرب) و قالب ارائه (متنی، تصویری، ترکیبی). ۲. چارچوب کدگذاری کیفی: این چارچوب بر مبنای چارچوب تحلیلی تلفیقی پژوهش (جدول ۱) و مشتمل بر چهار مقوله اصلی و تعریف عملیاتی هر یک طراحی شد:

مؤلفه مسائل کلامی: هر موقعیتی که خاصیت جابه‌جایی در درون یک داستان یا موقعیت واقع‌نما ارائه شده باشد.
مؤلفه الگویابی: هر موقعیتی که خاصیت جابه‌جایی در بافت یک توالی، دنباله یا آرایه (مستطیلی) ظاهر شده و به کشف الگو یا قاعده‌ای منجر شود. توالی‌ها و الگوهایی که تغییر جایگاه عناصر بدون تأثیر در مجموع یا حاصل ضرب است نمونه‌ای از خاصیت جابه‌جایی در الگوهاست. به علاوه، خاصیت جابه‌جایی، ساختار تقارنی درون برخی الگوهای عددی یا هندسی (مانند آرایه‌های مستطیلی) را آشکار می‌سازد.
مؤلفه مفهوم‌سازی نماد تساوی: هر موقعیتی که در آن نماد مساوی (=) برای نشان دادن برابری دو عبارت (و نه فقط اعلام نتیجه یک محاسبه) به کار رفته باشد. به علاوه، خاصیت جابه‌جایی نشان می‌دهد که تغییر ترتیب عملوندها در روابط جبری، اعتبار تساوی را حفظ می‌کند.
مؤلفه تعمیم قوانین حساب: هر موقعیتی که صراحتاً به بیان قاعده کلی جابه‌جایی (با کلمات یا نمادها) پرداخته یا دانش‌آموز را به تعمیم از مثال‌های عددی تشویق کند.

برای هر مؤلفه فوق، نمونه، نشانگر و مثال‌های عینی از کتاب برای راهنمایی کدگذار تعریف شد. فرایند گردآوری و تحلیل داده‌ها در سه مرحله به اجرا درآمد:

۱. مرحله پیش‌کدگذاری و آموزش: ابتدا دو جلد کتاب به‌صورت آزمایشی توسط پژوهشگران و یک کدگذار بیرونی تحلیل شد، ناهمخوانی‌ها مورد بحث قرار گرفت، و تعاریف و مصادیق مؤلفه‌ها و نشانگرها در پروتکل نهایی اصلاح و شفاف‌سازی شد.

۲. مرحله کدگذاری کمی و استخراج واحدهای تحلیل: کلیه صفحات هر شش جلد کتاب به روش تمام‌شماری مورد بررسی قرار گرفت. واحد تحلیل در این پژوهش «موقعیت آموزشی» تعریف شد. منظور از موقعیت آموزشی، یک تمرین، پرسش، فعالیت، تصویر همراه با دستورالعمل، مثال یا بخشی مستقل از متن درس است که دانش‌آموز را مستقیماً یا از طریق یک نمایش آموزشی با رابطه

جابه‌جایی در جمع یا ضرب می‌کند. صرف حضور دو عبارت عددی با ترتیب متفاوت، بدون وجود شواهدی از ارتباط آن‌ها با خاصیت جابه‌جایی، برای شناسایی یک موقعیت کافی تلقی نشد. برای کاهش ابهام در شناسایی موقعیت‌ها، سه معیار اصلی در نظر گرفته شد: (۱) وجود یک عمل جمع یا ضرب؛ (۲) وجود یا امکان استنباط تغییر ترتیب دو عدد یا دو گروه بدون تغییر حاصل؛ و (۳) وجود نشانه‌ای در متن، تصویر، پرسش یا فعالیت که دانش‌آموز را به این رابطه متوجه سازد. در صورتی که این سه شرط از محتوای موقعیت قابل احراز نبود، موقعیت در مجموعه داده‌های پژوهش وارد نمی‌شد. پس از شناسایی موقعیت‌ها، هر موقعیت بر اساس ماهیت شناختی تکلیف می‌توانست به یک یا چند مؤلفه تفکر جبری اختصاص یابد. هم‌پوشانی مقوله‌ها در مواردی مجاز بود که یک موقعیت به‌طور هم‌زمان بیش از یک فرایند شناختی را فعال می‌کرد؛ برای مثال، یک فعالیت ممکن بود هم مستلزم درک رابطه‌ای نماد تساوی و هم مستلزم تعمیم خاصیت جابه‌جایی باشد.

۳. مرحله کدگذاری کیفی: هر یک از داده‌ها و موقعیت‌های شناسایی‌شده، بر اساس چارچوب کدگذاری کیفی، در یک یا چند مقوله از چهار مؤلفه تفکر جبری قرار گرفت (به دلیل امکان تعلق یک موقعیت به بیش از یک مؤلفه، مجموع درصدها می‌تواند بیش از ۱۰۰ باشد). در هر یک از مراحل فوق، با توجه به کیفی یا کمی بودن داده، تحلیل داده‌ها به شرح زیر انجام پذیرفت:

تحلیل کمی: از آمار توصیفی شامل فراوانی، درصد، میانگین و انحراف معیار برای توصیف توزیع موقعیت‌ها در پایه‌های مختلف و میان مؤلفه‌ها استفاده شد. این تحلیل‌ها با استفاده از نرم‌افزار SPSS نسخه ۲۶ انجام شد و نتایج در قالب جدول و نمودار ارائه گردید.

تحلیل کیفی محتوایی: داده‌های کیفی با استفاده از روش تحلیل مضمون در چارچوب از پیش تعیین‌شده (چارچوب چهارمؤلفه‌ای) مورد بررسی قرار گرفت. در این مرحله، بر کیفیت تعامل داده‌ها و اینکه تا چه سطحی از یادگیری (حفظ کردن و اجرای عملیات، به کار بردن در حل مسئله، فهمیدن و تفسیر، تحلیل، ترکیب و تعمیم) را برمی‌انگیزاند تمرکز داشته است. عمق بازنمایی بر اساس پنج سطح عملیاتی در جدول ۹ پیوست کدگذاری شد. سطوح بالاتر در واقع مضمون‌های غنی و با استدلال بالا محسوب می‌شوند و سطوح پایین‌تر، مسائل سطحی تلقی خواهند شد.

تحلیل تطبیقی: داده‌های کمی و کیفی پایه‌های مختلف به‌طور مقایسه‌ای تحلیل شد تا الگوها، شکاف‌ها و ناهماهنگی‌های مسیر رشد از پایه اول تا ششم مشخص شود.

طراحی الگو: الگوی پیشنهادی در این پژوهش از ترکیب سه منبع شواهد شکل گرفت: نخست، مبانی نظری مربوط به تفکر جبری و حساب تعمیم‌یافته؛ دوم، یافته‌های کمی درباره میزان و توزیع بازنمایی خاصیت جابه‌جایی؛ و سوم، یافته‌های کیفی درباره سطح و ماهیت این بازنمایی‌ها. بر این اساس، طراحی الگو در چهار مرحله انجام شد.

به منظور توصیف میزان تمرکز یا پراکندگی هر مؤلفه در شش پایه تحصیلی، آنتروپی شانون به عنوان یک تحلیل کمی مکمل به کار گرفته شد. این شاخص در این پژوهش برای سنجش «اهمیت آموزشی» یا «کیفیت» مؤلفه‌ها به کار نرفته است، بلکه صرفاً میزان تمایز و پراکندگی الگوی توزیع هر مؤلفه در پایه‌های مختلف را نشان می‌دهد (نوروزی و همکاران، ۱۴۰۳؛ رضائی و ظهیری، ۱۴۰۰).

برای محاسبه ضریب اهمیت مؤلفه‌ها، ابتدا ماتریس تصمیم بر اساس داده‌های فراوانی جدول ۳ تشکیل شد. سپس مراحل زیر به ترتیب اجرا گردید.

۱. نرمال‌سازی داده‌ها: مقادیر هر ستون (هر مؤلفه) با استفاده از رابطه $P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$ نرمال‌سازی شد.

۲. محاسبه مقدار آنتروپی هر مؤلفه: با استفاده از رابطه $E_j = -k \sum_{i=1}^m P_{ij} \ln(P_{ij})$ ، که در آن $k = \frac{1}{\ln(m)}$ و m تعداد

پایه‌ها (۶ پایه) است، مقدار آنتروپی هر مؤلفه محاسبه گردید.

۳. درجه عدم قطعیت: مقدار $d_j = 1 - E_j$ محاسبه شد.

۴. ضریب اهمیت: ضریب اهمیت هر مؤلفه از $W_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}$ به دست آمد که n تعداد مؤلفه‌ها (۴) است.

نتایج حاصل از این تحلیل در جدول ۴ ارائه شده است. وزن بالاتر در این تحلیل به معنای «اهمیت آموزشی بیشتر» نیست، بلکه نشان‌دهنده آن است که توزیع فراوانی مؤلفه موردنظر در پایه‌های شش‌گانه از توزیع یکنواخت فاصله بیشتری دارد. از این رو، نتایج آنتروپی در کنار فراوانی‌های خام تفسیر شدند و به تنهایی مبنای قضاوت درباره کیفیت بازنمایی قرار نگرفتند.

برای اطمینان از اعتبار و قابلیت اعتماد یافته‌ها، اقدامات زیر صورت پذیرفت:

روایی محتوا (اعتبار ابزار): برای بررسی روایی ابزار کدگذاری، نسخه اولیه «پروتکل کدگذاری و طبقه‌بندی موقعیت‌های مرتبط با خاصیت جابه‌جایی» در اختیار پنج نفر از متخصصان حوزه آموزش ریاضی و برنامه‌ریزی درسی قرار گرفت. متخصصان، ابزار را از دو جنبه روایی صوری و روایی محتوایی بررسی کردند. در بررسی روایی صوری، وضوح و قابل‌فهم بودن تعاریف مقوله‌ها، شاخص‌ها و دستورالعمل‌های کدگذاری و نیز نبود ابهام در نحوه تشخیص و انتساب موقعیت‌ها مورد توجه قرار گرفت. در بررسی روایی محتوایی نیز تناسب مقوله‌ها با اهداف پژوهش، پوشش مناسب ابعاد مورد مطالعه، ارتباط شاخص‌ها با چارچوب نظری و کفایت معیارهای عملیاتی کدگذاری بررسی شد. بر اساس بازخورد متخصصان، اصلاحات لازم در تعاریف، دستورالعمل‌های کدگذاری و نحوه تشخیص موقعیت‌های مرتبط با خاصیت جابه‌جایی اعمال شد و نسخه نهایی پروتکل برای تحلیل محتوای کتاب‌های درسی مورد استفاده قرار گرفت.

پایایی (قابلیت اعتماد کدگذاری): برای بررسی قابلیت اعتماد فرایند کدگذاری، ۲۰ موقعیت آموزشی، معادل حدود ۳۰ درصد از کل موقعیت‌های شناسایی شده، به صورت تصادفی انتخاب، و توسط یک کدگذار مستقل، که پیش از کدگذاری با چارچوب نظری، مقوله‌ها، تعاریف عملیاتی و دستورالعمل کدگذاری آشنا شده بود، به طور مستقل کدگذاری شد. سپس کدگذاری پژوهشگران و کدگذار مستقل در سطح حضور/عدم حضور هر یک از چهار مؤلفه تفکر جبری در هر موقعیت با یکدیگر مقایسه شد.

به منظور بررسی میزان توافق فراتر از توافق تصادفی، ضریب کاپای کوهن محاسبه شد. مقدار کلی ضریب کاپا برابر با ۰/۸۷ به دست آمد که نشان‌دهنده توافق بسیار مطلوب میان کدگذاران است. جزئیات موارد توافق و عدم توافق و نتایج محاسبه ضریب کاپا در جدول ۸ پیوست ارائه شده است. در موارد عدم توافق، موارد موردنظر با مراجعه مجدد به تعاریف عملیاتی و دستورالعمل کدگذاری بررسی، و درباره مبنای انتساب کد تصمیم‌گیری شد.

یافته‌ها

کلیه صفحات هر شش کتاب ریاضی دوره ابتدایی به روش تمام‌شماری بررسی، و در نهایت ۶۷ موقعیت شناسایی شد و اطلاعات توصیفی آن‌ها به دست آمد. بر اساس موقعیت‌های شناسایی شده، یافته‌های این پژوهش، که در راستای پاسخ به سه پرسش پژوهش گردآوری و تحلیل شده‌اند، در سه بخش اصلی ارائه می‌گردند:

الف) تحلیل وضعیت موجود؛ ب) طراحی الگوی یکپارچه پیشنهادی؛ ج) دلالت‌های عملی.

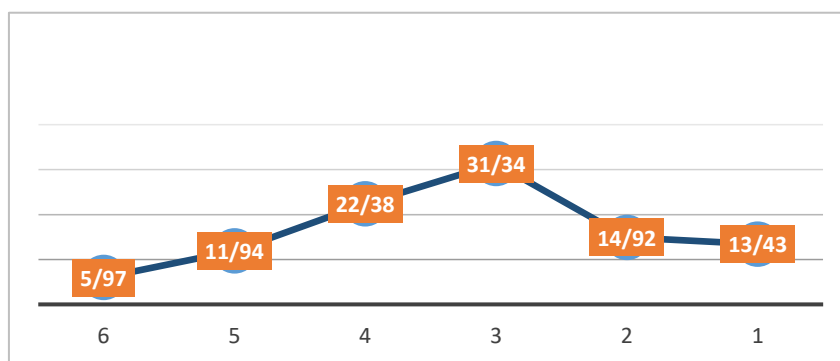
الف) تحلیل وضعیت موجود

یافته‌های کمی: این بخش به تحلیل کمی و کیفی ۶۷ موقعیت شناسایی شده از بازنمایی خاصیت جابه‌جایی در کتاب‌های درسی می‌پردازد. توزیع فراوانی موقعیت‌ها در پایه‌های مختلف، الگوی نامتوازن و فاقد تداوم رشدی را آشکار می‌سازد (جدول ۲ و نمودار ۱).

جدول ۲. فراوانی استفاده از خاصیت جابه‌جایی جمع و ضرب در کتاب‌های مقطع ابتدایی

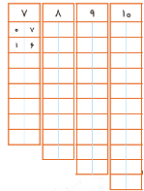
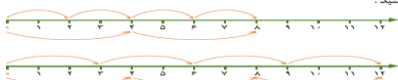
پایه	فراوانی	درصد فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی
اول	۹	۱۳٪/۴۳	۹
دوم	۱۰	۱۴٪/۹۲	۱۹
سوم	۲۱	۳۱٪/۳۴	۴۰
چهارم	۱۵	۲۲٪/۳۸	۵۵
پنجم	۸	۱۱٪/۹۴	۶۳
ششم	۴	۵٪/۹۷	۶۷
میانگین	۱۱/۱۶	۱۶٪/۶۶	

نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۲ در نمودار ۱ به‌صورت تصویری روند پرداختن به خاصیت جابه‌جایی در پایه‌های اول تا ششم ابتدایی را به درصد نشان می‌دهد.



نمودار ۱. توزیع درصدی موقعیت‌های مربوط به خاصیت جابه‌جایی در پایه‌های مختلف

بیش از ۵۳ درصد از کل توجه به خاصیت جابه‌جایی تنها در دو پایه سوم و چهارم متمرکز شده است. این در حالی است که با ورود به پایه‌های پنجم و ششم و مواجهه دانش‌آموزان با مفاهیم پیچیده‌تری مانند کسر، اعشار و نسبت، به‌طور معناداری از پرداختن به این مفهوم ساختاری کاسته می‌شود. این الگو نشان می‌دهد که توجه به خاصیت جابه‌جایی موضعی و مقطعی بوده و نگرشی زیربنایی برای حفظ و تعمیق کاربرد خاصیت جابه‌جایی در طول دوره ابتدایی وجود ندارد. در اینجا نمونه‌ای از موارد یادشده در کتاب درسی ریاضی پایه‌های مختلف در شکل ۲ آورده شده است.

پایه	مثال کتاب درسی ریاضی	صفحه
اول	 دو عدد پیدا کن که جمع آن‌ها برابر با عددی باشد که بالای ستون آن‌ها نوشته شده باشد.	۹۰
دوم	حاصل جمع‌های زیر ۶ می‌شود. مانند نمونه جمع‌هایی را بنویسید که حاصل جمع برابر ۶ شود. ۰ + ۶ = ۶ ۴ + ۲ = ۶ ۲ + ۴ = ۶ + =	۲۶
سوم	۳ تساوی ضرب را با کمک محورها بنویسید. 	۶۶

۴۶	حل مسئله ۱- آموزگار از دانش‌آموزان خواست دو عدد بگویند که حاصل ضربشان ۱۲ شود. مجموعه از صفحه‌ی شطرنجی رویه‌رو استفاده کرد. او شکل را دسته‌بندی کرد؛ تعداد مربع‌های دسته‌ها یا هم برابر بود. سپس برای هر شکل دو ضرب نوشت. کار او را کامل کنید. $3 \times 4 = 12$ $4 \times 3 = 12$ $12 \times 1 = 12$ $1 \times 12 = 12$	چهارم
۱۰۳	ناهید: باید حاصل $\frac{1}{3} + 2$ را پیدا کنیم؛ یعنی نصف عدد $\frac{1}{3}$ را. به جای این کار می‌توانیم $\frac{1}{3}$ عدد $\frac{1}{3}$ را پیدا کنیم. پس، کافی است دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ را در هم ضرب کنیم؛ یعنی: $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	پنجم
۴۰	۳- آیا حاصل تقسیم‌های رویه‌رو برابر است؟ چرا؟ $1 \div \frac{1}{5}$ و $\frac{1}{5} \div 1$	ششم

شکل ۲. نمونه‌ای از خاصیت جابه‌جایی در کتب درسی

جدول ۳. فراوانی پرداختن به تفکر جبری در موقعیت‌های خاصیت جابه‌جایی در کتاب‌های مقطع ابتدایی

پایه	تعداد کل موقعیت‌ها	مسائل کلامی		الگویابی		مفهوم سازی نماد تساوی		تعمیم قوانین حساب	
		فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
اول	۹	۹	۱۰۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
دوم	۱۰	۱	۱۰	۲	۲۰	۳	۳۰	۴	۴۰
سوم	۲۱	۰	۰	۲	۵/۹	۷	۳۳/۳	۱۲	۵۷/۱
چهارم	۱۵	۰	۰	۰	۰	۲	۳۳/۳	۱۳	۸۶/۷
پنجم	۸	۰	۰	۰	۰	۲	۱۲/۵	۷	۸۷/۵
ششم	۴	۰	۰	۰	۵۰	۲	۰	۴	۱۰۰
مجموع	۶۷	۱۰	۱۴/۹	۴	۶	۱۵	۱۹/۴	۴۰	۵۹/۷

در این جدول درصدها با یک رقم اعشار محاسبه شده‌اند و تخصیص هر موقعیت به بیش از یک مؤلفه امکان‌پذیر بوده است. همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، مؤلفه «تعمیم قوانین حساب» با ۵۹/۷ درصد بیشترین سهم را دارد، در حالی که الگویابی با ۶ درصد کمترین سهم را به خود اختصاص داده است. این الگو نشان می‌دهد که در کتاب‌های درسی به مؤلفه‌های مذکور به‌طور متوازن و متعادل پرداخته نشده و به علاوه مؤلفه‌ها و مواردی بیان شده‌اند که عمدتاً بر انتقال مستقیم قاعده تأکید دارند و فرایندهای اکتشاف و استدلال را نادیده می‌گیرند. کاپلان (2025) نیز در تحلیل تطبیقی خود نشان داد که کتاب‌های درسی‌ای که بر انتقال مستقیم قواعد تأکید دارند، در مقایسه با کتاب‌هایی که بر فرایندهای اکتشافی تأکید می‌کنند، کارایی کمتری در پرورش تفکر انتقادی جبری دارند. همچنین، با توجه به اینکه کمترین موقعیت مربوط به مؤلفه الگویابی (۴ مورد از ۶۷ موقعیت) است، این نشان از غفلت جدی از این بستر غنی برای پرورش تفکر جبری دارد. با افزودن نمونه‌هایی در این زمینه، هم توانایی استخراج قاعده و الگویابی دانش‌آموز تقویت می‌شود و هم توازن در مؤلفه‌های چهارگانه ایجاد خواهد شد. نتایج حاصل از تحلیل آنتروپی شانون نیز در جدول ۴ ارائه شده است که این نتایج نیز مؤید یافته‌های بالاست.

جدول ۴. ضرایب اهمیت مؤلفه‌های تفکر جبری در کتاب‌های ریاضی ابتدایی بر اساس تکنیک آنتروپی شانون

مؤلفه تفکر جبری	آنتروپی (E_i)	درجه عدم قطعیت (d_i)	ضریب اهمیت (W_i)
مسائل کلامی	۰/۱۸۱	۰/۸۱۹	۰/۴۵۸
الگویابی	۰/۳۸۷	۰/۶۱۳	۰/۳۴۳
مفهوم‌سازی نماد تساوی	۰/۸۱۲	۰/۱۸۸	۰/۱۰۵
تعمیم قوانین حساب	۰/۸۳۳	۰/۱۶۷	۰/۰۹۴

جدول ۴ نشان می‌دهد نتایج آنتروپی شانون نیز اطلاعات مکملی درباره الگوی توزیع مؤلفه‌ها در پایه‌های مختلف فراهم کرد. بر اساس محاسبات، مسائل کلامی و الگویابی، به دلیل تمرکز بیشتر فراوانی آن‌ها در تعداد محدودی از پایه‌ها، درجه عدم قطعیت کمتری در توزیع خود نشان دادند و در نتیجه وزن بیشتری دریافت کردند. در مقابل، توزیع مفهوم‌سازی نماد تساوی و تعمیم قوانین حساب در میان پایه‌های مختلف یکنواخت‌تر بود و وزن کمتری به دست آوردند. این نتایج نباید به معنای اهمیت آموزشی بیشتر یا کمتر مؤلفه‌ها تلقی شود، بلکه نشان‌دهنده تفاوت در الگوی پراکندگی آن‌ها در طول دوره ابتدایی است. بنابراین، یافته آنتروپی در کنار فراوانی خام مؤلفه‌ها نشان می‌دهد که، برای ارزیابی وضعیت تفکر جبری، هم میزان حضور یک مؤلفه و هم نحوه توزیع آن در طول پایه‌ها باید مورد توجه قرار گیرد.

یافته‌های کیفی: تحلیل کیفی موقعیت‌های شناسایی شده نشان داد که چهار مؤلفه تفکر جبری، از نظر نوع و سطح بازنمایی، الگوی یکسانی ندارند. در مؤلفه «تعمیم قوانین حساب»، بخش قابل توجهی از موقعیت‌ها به ارائه یا استفاده مستقیم از قاعده جابه‌جایی پس از مشاهده چند مثال عددی اختصاص داشت. در این موقعیت‌ها، فرصت محدودی برای طرح حدس، مقایسه موارد، آزمون قاعده در موقعیت‌های جدید یا بیان استدلال فراهم شده بود. بنابراین، بر اساس معیارهای عملیاتی تعریف‌شده در روش، بخش قابل توجهی از این موقعیت‌ها در سطوح اجرایی یا کاربردی اشاره شده در جدول ۹ پیوست قرار گرفتند و کمتر به سطوح اکتشافی و تعمیمی رسیدند.

در مؤلفه «مفهوم‌سازی نماد تساوی»، بسیاری از موقعیت‌ها از ساختارهایی تشکیل شده بودند که در آن نماد مساوی عمدتاً در انتهای یک فرایند محاسباتی قرار می‌گرفت. در چنین مواردی تساوی بیشتر به عنوان نشانه‌ای برای اعلام نتیجه عمل می‌کرد. در مقابل، موقعیت‌هایی که در آن دو عبارت متفاوت به عنوان دو طرف یک رابطه هم‌ارز مورد مقایسه قرار می‌گرفتند یا از دانش آموز خواسته می‌شد درباره درستی یک تساوی در موارد مختلف استدلال کند، محدودتر بودند. از این رو، بازنمایی این مؤلفه بیشتر در سطح عملیاتی و کاربردی مشاهده شد و فرصت‌های کمتری برای تقویت درک رابطه‌ای و ساختاری فراهم کرد.

در مؤلفه «الگویابی»، تعداد موقعیت‌های شناسایی شده کمتر از سایر مؤلفه‌ها بود و نمونه‌های موجود عمدتاً به شناسایی یا ادامه دادن الگوهای عددی محدود می‌شدند. از منظر معیارهای این پژوهش، صرفاً ادامه یک دنباله، بدون توجه به رابطه‌ای که ساختار الگو را تولید می‌کند، در سطح پایین‌تری از الگویابی جبری قرار می‌گیرد. موقعیت‌هایی که در آن دانش آموز باید رابطه بین تغییرات را توضیح دهد، ساختار را در موارد جدید به کار گیرد یا قاعده را بیان کند ظرفیت بیشتری برای ارتباط میان الگویابی و تفکر جبری دارند.

در مؤلفه «مسائل کلامی»، موقعیت‌های شناسایی شده عمدتاً در پایه‌های پایین‌تر متمرکز بودند. اگرچه این موقعیت‌ها می‌توانند زمینه‌ای برای مشاهده جابه‌جایی ترتیب گروه‌ها و مقادیر فراهم کنند، در بخش قابل توجهی از آن‌ها از دانش آموز خواسته نشده بود که دو ترتیب متفاوت را مقایسه یا دلیل ثابت ماندن نتیجه را توضیح دهد. بنابراین، وجود یک مسئله کلامی به خودی خود به معنای تحقق تفکر جبری در سطح بالا تلقی نشد و کیفیت بازنمایی بر اساس میزان فعال شدن رابطه ساختاری مورد بررسی قرار گرفت.

در مجموع، یافته‌های کیفی نشان می‌دهد مسئله اصلی صرفاً کمبود تعداد موقعیت‌ها نیست، بلکه نحوه طراحی و سطوح شناختی آن‌ها نیز اهمیت دارد. بنابراین، برای تقویت نقش خاصیت جابه‌جایی در توسعه تفکر جبری، افزایش فراوانی موقعیت‌ها به تنهایی کافی نیست،

بلکه لازم است توالی فعالیت‌ها از مشاهده و تجربه عینی، به مقایسه و توضیح رابطه، کاربست، کشف قاعده و در نهایت تعمیم آن در موقعیت‌های جدید حرکت کند. در حقیقت، از نظر کیفی اغلب نمونه‌های کتاب سطحی، بدون فرایند استدلال و استخراج قواعد جبری است که در جدول ۵ با مصداق و نمونه عینی به آن‌ها اشاره شده است.

جدول ۵. مضامین و الگوهای کیفی بازنمایی مؤلفه‌های تفکر جبری

مؤلفه تفکر جبری	فراوانی (درصد)	کیفیت و ماهیت بازنمایی (تحلیل کیفی)	نمونه عینی از ضعف
تعمیم قوانین حساب	۴۰ مورد (۵۹/۷)	غالب و سطحی: در اکثر موارد، قاعده پس از چند مثال عددی به صورت امری از پیش تعیین شده (مثلاً «حاصل ضرب با جابه‌جایی مرتبه اعداد تغییر نمی‌کند») ارائه می‌شود. فرایند اکتشاف، حدس‌زنی و استدلال دانش‌آموز برای رسیدن به تعمیم مغفول مانده است.	در پایه سوم، پس از نمایش چند آرایه، مستقیماً گفته می‌شود: «در ضرب، می‌توانیم جای دو عدد را عوض کنیم».
مفهوم‌سازی نماد تساوی	۱۵ مورد (۱۹/۴)	عمدتاً عملیاتی: در بیشتر موارد، نماد مساوی صرفاً نتیجه یک محاسبه را اعلام می‌کند (مثلاً $۸ = ۵ + ۳$). هیچ موقعیت پرسش‌محور یا استدلال‌طلبانه‌ای برای تفکر درباره برابری ذاتی دو عبارت متفاوت (مثلاً «آیا $۱۲ \div ۴ = ۳ \times ۱$ همیشه درست است؟») طراحی نشده است.	تمرین‌های پُرکن جای خالی، مانند $۵ = ۲ + \square$ ، که درک عملیاتی را تقویت می‌کنند.
مسائل کلامی	۱۰ مورد (۱۴/۹)	متمرکز در پایه اول و کم‌کاربرد: ۹۰٪ این موارد در پایه اول دیده می‌شود و عمدتاً نقش تثبیت جمع را دارند. در پایه‌های بالاتر از ظرفیت مسائل کلامی برای مدل‌سازی موقعیت‌هایی که جابه‌جایی راهبرد حل را ساده می‌کند (مانند جمع زدن بخش‌های ده‌تایی در یک مسئله خرید) استفاده نشده است.	مسئله ساده «۳ سیب و ۴ موز» در پایه اول. فقدان مسائل پیچیده‌تر در پایه‌های بعد.
الگویابی	۴ مورد (۶)	حاشیه‌ای و غیرفعال: موقعیت‌های موجود منحصر به تکمیل اعضای بعدی یک دنباله حسابی ساده هستند. هیچ فعالیتی برای کشف رابطه بین آرایه‌های مستطیلی معادل (مثلاً «یافتن همه آرایه‌هایی که مساحت ۲۴ دارند») یا استخراج قاعده جبری از یک الگوی هندسی وجود ندارد.	تمرین «عدد بعدی در دنباله ۲، ۴، ۶، ... کدام است؟» بدون پرسش درباره رابطه بین جملات.

در مجموع، با توجه به یافته‌های پژوهش و جداول فوق، تحلیل حاضر چهار شکاف ساختاری را در بازنمایی کنونی خاصیت جابه‌جایی آشکار می‌سازد که پاسخ پرسش اول پژوهش را تشکیل می‌دهند:

۱. شکاف توزیعی: فقدان یک منطق تدریجی و توسعه‌یابنده در توزیع محتوا از پایه اول تا ششم.
 ۲. شکاف عمقی: تمرکز بر انتقال قاعده به بهای غفلت از پرورش فرایندهای شناختی مرتبط (استدلال، تعمیم، درک رابطه‌ای).
 ۳. شکاف زمینه‌ای: بیهوده گذاشتن پتانسیل غنی دو بستر الگویابی و مسائل کلامی پیچیده.
 ۴. شکاف کاربردی: عدم ارتباط معنادار این خاصیت با ساده‌سازی حل مسئله در حوزه‌های عددی جدید (کسری، اعشاری).
- تحلیل آنتروپی شانون نیز شکاف‌های شناسایی شده در این بخش را به صورت کمی تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که نظام بازنمایی خاصیت جابه‌جایی در کتاب‌های درسی فاقد «نقشه راه متوازن و توسعه‌یابنده» است. این یافته‌ها ضرورت طراحی الگوی یکپارچه‌ای را که توزیع متوازن‌تری از مؤلفه‌ها در طول پایه‌های مختلف ارائه دهد بیش‌ازپیش آشکار می‌سازد.

ب) طراحی الگوی یکپارچه پایه به پایه:

در مرحله نخست، شکاف‌های اصلی شناسایی شده از تحلیل محتوا استخراج شد. این شکاف‌ها شامل تمرکز نامتوازن موقعیت‌ها در پایه‌های مختلف، حضور محدود الگویابی، غلبه بازنمایی عملیاتی نماد تساوی، و فاصله میان ارائه قاعده و فرصت‌های اکتشاف و تعمیم بود.

در مرحله دوم، برای هر شکاف، یک اصل طراحی متناظر تعیین شد. برای مثال، در برابر تمرکز مقطعی محتوا، اصل «تداوم طولی»؛ در برابر غلبه فعالیت‌های اجرایی، اصل «حرکت تدریجی از تجربه به استدلال»؛ در برابر ضعف الگویابی، اصل «پیوند الگو با ساختار»؛ و در برابر بازنمایی عملیاتی تساوی، اصل «گذار از پاسخ‌محوری به درک رابطه‌ای» در نظر گرفته شد.

در مرحله سوم، اصول طراحی در یک توالی رشدی پایه به پایه سازمان‌دهی شدند. این توالی از تجربه عینی و زمینه‌مند در پایه‌های پایین‌تر آغاز می‌شود، در پایه‌های میانی به کشف رابطه، مقایسه و تعمیم هدایت‌شده می‌رسد و در پایه‌های بالاتر به تعمیم نمادین و کاربست خاصیت در ساختارهای عددی پیچیده‌تر گسترش می‌یابد.

در مرحله چهارم، برای هر پایه و هر مؤلفه، یک هدف یادگیری، راهبرد آموزشی و نمونه فعالیت تدوین شد. فعالیت‌های پیشنهادی صرفاً نمونه‌های اجرایی برای نشان دادن نحوه تحقق اصول طراحی هستند و به معنای برنامه درسی نهایی یا بسته آموزشی اعتبارسنجی شده تلقی نمی‌شوند. این الگو برای هر پایه هدف یادگیری پیشنهادی، راهبرد محوری و نمونه فعالیت را در هر یک از چهار بستر مشخص می‌کند (جدول ۶).

جدول ۶. الگوی یکپارچه پیشنهادی برای تلفیق خاصیت جابه‌جایی با تفکر جبری

پایه	بستر / مؤلفه	هدف یادگیری پیشنهادی	راهبرد آموزشی محوری	نمونه فعالیت / تمرین پیشنهادی
اول	مسائل کلامی	درک عینی تغییرناپذیری حاصل جمع با تغییر ترتیب اشیاء در یک موقعیت.	مدل‌سازی فیزیکی با اشیاء و نقش‌آفرینی.	در نقش‌بازی، اگر اول ۳ مداد به علی بدهیم و سپس ۲ مداد، یا اول ۲ مداد و بعد ۳ مداد، کل مدادهای او چند تا می‌شود؟ با مکعب‌ها نشان دهید.
دوم	الگویابی و تساوی	کشف جابه‌جایی در الگوهای تکرارشونده و آشنایی مقدماتی با نماد مساوی به معنای «همان قدر است».	استفاده از ترازوهای تصویری و الگوهای تکرارشونده (ABAB).	مهره‌های آبی و قرمز را به صورت یک‌درمیان بچینید. آیا تعداد کل مهره‌ها اگر از قرمز شروع کنیم فرق می‌کند؟ روی ترازوی تصویری: ۳+۵ در یک کفه، ۳+۵ در کفه دیگر.
سوم	تعمیم (ضرب) و الگویابی	کشف قاعده جابه‌جایی ضرب از طریق دست‌کاری آرایه‌های مستطیلی و بیان آن با کلمات خود دانش‌آموز.	اکتشاف با شبکه‌های نقطه‌ای و ایجاد آرایه‌های معادل.	با ۱۲ چوبک، همه مستطیل‌های ممکن را بسازید. ابعاد هر مستطیل را به صورت «ردیف در ستون» ثبت کنید. چه رابطه‌ای بین اعداد هر جفت می‌بینید؟
چهارم	مسائل کلامی پیچیده و تعمیم	به کارگیری جابه‌جایی به عنوان یک راهبرد برای ساده‌سازی محاسبه ذهنی در مسائل چندمرحله‌ای.	طراحی مسائل خرید یا توزیع که شامل اعدادی با ترکیب‌های ده‌تایی باشند.	برای جشن، ۷ بسته ۱۲ تایی شیرینی خریده‌ایم. محاسبه ذهنی کل شیرینی‌ها با روش ۷×۱۲ آسان‌تر است یا ۷×۱۲؟ چرا؟ توضیح دهید.

پنجم	تساوی رابطه‌ای و تعمیم (کسر ها)	تقویت درک رابطه‌ای تساوی و آزمایش اعتبار جابه‌جایی در ضرب کسرها با استفاده از مدل‌های مساحتی.	حل معادلات ساده ساختاری و استفاده از مدل مستطیلی مساحت.	آیا عبارت $\frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2}$ همیشه درست است؟ با رسم یک مستطیل و تقسیم آن به قسمت‌های مساوی، صحت آن را بررسی کنید.
ششم	الگویابی پیشرفته و کار بست	تعمیم جابه‌جایی به روابط تناسبی و استفاده از آن در فرمول‌های محیط و مساحت.	تحلیل الگوهای عددی در جدول‌های تناسب و استخراج فرمول.	توضیح دهید چرا $a \times b = b \times a$ و این خاصیت چگونه در محاسبه مساحت مستطیل به کار می‌آید.

الگوی ارائه‌شده در این پژوهش یک الگوی نظری-پیشنه‌ادی است که بر مبنای تلفیق مبانی نظری و یافته‌های تحلیل محتوای کتاب‌های درسی طراحی شده است. از این رو، «اعتبار» آن در این مرحله به معنای برخورداری از منطق نظری، سازگاری با یافته‌های تحلیل و وجود رابطه روشن میان شکاف‌های شناسایی شده و راهکارهای پیشنهادی است، نه اثبات اثربخشی آن در محیط واقعی کلاس درس.

در طراحی الگو، سه رابطه مورد توجه قرار گرفت: نخست، رابطه عمودی میان پایه‌ها که از تجربه عینی به مشاهده رابطه، اکتشاف، تعمیم و کار بست حرکت می‌کند؛ دوم، رابطه افقی میان چهار مؤلفه تفکر جبری که امکان ظهور خاصیت جابه‌جایی را در زمینه‌های متفاوت فراهم می‌سازد؛ و سوم، رابطه میان هر شکاف شناسایی شده و اصل طراحی متناظر با آن. با وجود این انسجام نظری و تحلیلی، الگو در این پژوهش توسط گروه مستقل متخصصان به صورت رسمی اعتبارسنجی نشده و در کلاس درس نیز اجرا و آزمون نشده است. بنابراین، ادعا درباره قابلیت اثربخشی الگو باید به عنوان یک فرضیه پژوهشی در نظر گرفته شود و بررسی تجربی آن به پژوهش‌های آینده واگذار می‌شود.

ج) دلالت‌های عملی:

با توجه به اینکه الگوی پیشنهادی در این پژوهش اجرا و به صورت تجربی ارزیابی نشده است، دلالت‌های عملی آن باید به عنوان پیشنهادهایی برای بازنگری و طراحی آموزشی در نظر گرفته شوند، نه پیامدهای اثبات شده.

برای مؤلفان و برنامه‌ریزان درسی، یافته‌های پژوهش می‌تواند ضرورت بررسی توزیع طولی مفاهیم ساختاری و ایجاد پیوستگی میان فعالیت‌های حسابی و فرصت‌های تفکر جبری را برجسته سازد. همچنین، می‌توان در بازنگری فعالیت‌ها سهم بیشتری برای تکالیف اکتشافی، مقایسه‌ای و استدلال محور در نظر گرفت.

برای معلمان و برنامه‌های تربیت معلم، الگوی پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک نمونه برای طراحی فعالیت‌هایی مورد استفاده قرار گیرد که در آن‌ها خاصیت جابه‌جایی صرفاً به صورت یک قاعده اعلام نمی‌شود، بلکه از طریق تجربه، مقایسه، توضیح و تعمیم مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای طراحان ارزشیابی نیز پیشنهاد می‌شود، علاوه بر سنجش توانایی اجرای قاعده، تکالیفی برای سنجش توضیح رابطه، تشخیص نمونه‌های معتبر، تعمیم و انتقال خاصیت به موقعیت‌های جدید طراحی شود.

در نهایت، بررسی اینکه اجرای چنین الگویی واقعاً موجب بهبود یادگیری، استدلال ساختاری یا عملکرد جبری دانش‌آموزان می‌شود نیازمند مطالعات تجربی مستقل است و از داده‌های تحلیل محتوای حاضر قابل استنتاج نیست.

بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف بررسی بازنمایی خاصیت جابه‌جایی در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی ایران و ارائه چارچوبی پیشنهادی برای پیوند دادن این مفهوم ساختاری با مؤلفه‌های تفکر جبری انجام شد. یافته‌های تحلیل محتوای ۶۷ موقعیت شناسایی شده نشان داد که بازنمایی خاصیت جابه‌جایی در شش پایه تحصیلی از توزیع یکنواختی برخوردار نیست. بخش قابل توجهی از موقعیت‌ها در

پایه‌های سوم و چهارم متمرکز بود، در حالی که در پایه‌های پنجم و ششم تعداد موقعیت‌های شناسایی شده کاهش یافت. این الگو از وجود یک پیوستگی طولی روشن در بازنمایی این مفهوم در سراسر دوره ابتدایی حمایت نمی‌کند.

از نظر مؤلفه‌های تفکر جبری نیز توزیع موقعیت‌ها نامتوازن بود. تعمیم قوانین حساب بیشترین تعداد موقعیت‌های کدگذاری شده را به خود اختصاص داد، در حالی که الگویابی کمترین فراوانی را داشت. با این حال، فراوانی بیشتر یک مؤلفه به خودی خود نشان‌دهنده کیفیت بالاتر بازنمایی آن نیست. تحلیل کیفی نشان داد که در بخشی از موقعیت‌های مرتبط با تعمیم، قاعده جابه‌جایی بیشتر به صورت مستقیم ارائه یا در فعالیت‌های اجرایی به کار گرفته شده است و فرصت‌های محدودتری برای کشف، مقایسه، توضیح و تعمیم فراهم شده است. در مورد نماد تساوی نیز بخش قابل توجهی از موقعیت‌ها ماهیتی عملیاتی داشتند و موقعیت‌های رابطه‌ای و استدلال محور سهم کمتری داشتند. الگویابی نیز عمدتاً در تعداد محدودی از موقعیت‌ها ظاهر شد و در برخی موارد به تکمیل توالی‌ها محدود بود.

تحلیل آنتروپی شانون، به عنوان یک تحلیل مکمل، تفاوت در الگوی توزیع مؤلفه‌ها در پایه‌های مختلف را آشکار کرد. با توجه به ماهیت این شاخص، نتایج آنتروپی به عنوان شاخصی از میزان پراکندگی یا تمرکز توزیع تفسیر شد و نه به عنوان معیاری برای تعیین اهمیت آموزشی یا کیفیت هر مؤلفه. بنابراین، تفسیر وضعیت بازنمایی بر اساس ترکیب فراوانی‌های خام، تحلیل کیفی و الگوی توزیع طولی انجام گرفت.

بر مبنای این یافته‌ها، پژوهش حاضر یک الگوی پیشنهادی پایه‌به‌پایه ارائه کرد که در آن چهار مؤلفه تفکر جبری در ارتباط با خاصیت جابه‌جایی و در قالب یک توالی رشدی سازمان‌دهی شده‌اند. منطق طراحی این الگو از چهار اصل اصلی پیروی می‌کند: تداوم در طول پایه‌ها، حرکت از تجربه عینی به استدلال و تعمیم، تقویت پیوند میان الگو و ساختار، و انتقال تدریجی خاصیت از موقعیت‌های ساده به کاربردهای پیچیده‌تر. در این چارچوب، فعالیت‌های پیشنهادی به عنوان نمونه‌هایی برای نشان دادن نحوه تحقق اصول طراحی ارائه شده‌اند و نه به عنوان برنامه درسی نهایی یا مجموعه فعالیت‌های اعتبارسنجی شده.

از این منظر، نوآوری اصلی پژوهش در تلاش برای برقراری پیوند میان «تحلیل بازنمایی یک مفهوم ساختاری مشخص» و «طراحی یک توالی پیشنهادی برای تلفیق آن با بسترهای تفکر جبری» قرار دارد. این رویکرد می‌تواند مبنایی برای بحث درباره نحوه توزیع طولی مفاهیم ساختاری در برنامه درسی و طراحی فعالیت‌های مکمل فراهم آورد.

با وجود این، چند محدودیت باید در تفسیر یافته‌ها مورد توجه قرار گیرد. نخست، داده‌های پژوهش از محتوای کتاب‌های درسی استخراج شده‌اند و بنابراین یافته‌ها مستقیماً درباره درک، عملکرد یا یادگیری دانش‌آموزان داور نمی‌کنند. دوم، الگوی پیشنهادی در محیط واقعی کلاس درس اجرا نشده و اثربخشی آن مورد آزمون تجربی قرار نگرفته است. سوم، اگرچه برای چارچوب کدگذاری روایی محتوایی و پایایی کدگذاری بررسی شد، اعتبار تجربی خود الگو در این پژوهش بررسی نشده است؛ بنابراین، ادعای اثربخشی الگو یا تأثیر آن بر یادگیری دانش‌آموزان مستلزم پژوهش‌های بعدی است.

در مجموع، یافته‌های پژوهش نشان می‌دهد که، برای استفاده مؤثرتر از خاصیت جابه‌جایی به عنوان یک مفهوم ساختاری در آموزش ابتدایی، صرف حضور این خاصیت در کتاب‌های درسی کافی نیست، بلکه نوع بازنمایی، سطح شناختی فعالیت‌ها و توزیع آن‌ها در طول پایه‌ها نیز اهمیت دارد. از این رو، پیشنهاد می‌شود پژوهش‌های آینده، ضمن اعتبارسنجی نظر متخصصان درباره الگوی پیشنهادی، اجرای آزمایشی آن را در کلاس‌های درس بررسی کنند و میزان تأثیر احتمالی آن بر درک رابطه‌ای تساوی، توانایی تعمیم، الگویابی و استدلال ساختاری دانش‌آموزان را به صورت تجربی ارزیابی نمایند.

مشارکت نویسندگان

میزان مشارکت نویسندگان در نگارش مقاله به صورت برابر بوده است.

تعارض منافع

نویسندگان هیچ‌گونه تعارض منفعی را در این پژوهش گزارش نکرده‌اند.

حمایت مالی

این پژوهش هیچ‌گونه حمایت مالی از سوی هیچ سازمان یا نهادی دریافت نکرده است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داوران محترم مقاله بابت نظرات ارزشمندشان بسیار سپاسگزارند.

منابع

- اسکندری، مجتبی؛ ریحانی، ابراهیم؛ ایزدی، مهدی. (۱۴۰۳). مفهوم احتمال در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی: نگاهی تحلیلی به مفاهیم و سطوح استلزام شناختی تکالیف. رویکردی نو در علوم تربیتی، ۳، ۵۳-۶۹. [لینک]
- داشته، امیرحسین؛ نوریان، محمد؛ عسگرپور، شیلا. (۱۴۰۴). اعتباربخشی الگوی عوامل مؤثر بر فعالیت‌های خلاقانه دانش‌آموزان در درس ریاضی دوره اول متوسطه. تفکر و کودک، ۱۶(۱)، ۱۶۷-۱۹۷. [لینک]
- خسروشاهی، لیلا؛ اصغری، امیرحسین. (۱۳۹۵). بسترهای مناسب برای جبرورزی در دوره ابتدایی همراه با تحلیل محتوای جبر در کتاب‌های دوره ابتدایی ایران بر اساس چهارچوب پیشنهادی. نوآوری‌های آموزشی، ۱۵(۳۵)، ۱۴۷-۱۷۰. [لینک]
- راعی، فاطمه؛ کاظمی، محمدباقر. (۱۴۰۴). تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی در موقعیت‌های مبتنی بر تقریب و تخمین. مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، ۱۴(۳)، ۱۲۹-۱۴۳. [لینک]
- رضائی، مهدیه؛ ظهیری، مریم. (۱۴۰۰). واکاوی محتوای کتاب درسی «انسان و محیط‌زیست» پایه یازدهم دوره متوسطه بر اساس مؤلفه‌های محیط‌زیستی به روش آنتروپی شانون. مطالعات علوم محیط‌زیست، ۶، ۴۲۵۹-۴۲۷۳. [لینک]
- زارع، مرجان؛ براتعلی، مریم. (۱۴۰۰). تأثیر استراتژی‌های یاددهی-یادگیری مغز محور (B.B.L) بر یادگیری درس ریاضی و علوم دانش‌آموزان پایه اول دبستان شهر اصفهان. پژوهش و نوآوری در آموزش ابتدایی، ۳(۵)، ۱۸-۲۷. [لینک]
- شیرزادی، زهرا؛ وحیدی، زهرا. (۱۴۰۲). تحلیل محتوای کتب مطالعات و فارسی ششم ابتدایی از جهت توجه به مؤلفه‌های اخلاق حرفه‌ای. پژوهش و نوآوری در آموزش ابتدایی، ۵(۱۰)، ۱۲۷-۱۴۲. [لینک]
- طائری، بیژن. (۱۳۹۵). مبانی جبر. جهاد دانشگاهی، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- نوروزی، وریا؛ ادیب، یوسف؛ یاری، جهانگیر؛ بدری گرگری، رحیم. (۱۴۰۳). بررسی جایگاه برنامه درسی فلسفه برای کودکان با جهت‌گیری آموزش چندفرهنگی در کتب فارسی ابتدایی با تکنیک آنتروپی شانون. مطالعات آموزشی و آموزشگاهی، ۱۳، ۲۶۳-۲۷۶. [لینک]

References

- Apsari, R. A., Putri, R. I. I., Sariyasa, Abels, M., & Prayitno, S. (2020). Geometry representation to develop algebraic thinking: A recommendation for a pattern investigation in pre-algebra class. *Mathematics Education, 11*, 45-58. [\[Link\]](#)
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L., & Farnsworth, V. (2000). *Building a foundation for learning algebra in the elementary grades* (Brief Vol. 1, No. 2). National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Dāshteh, A., Nuriyān, M., & Asgarpur, Sh. (2025). Validation of the model of factors affecting students' creative activities in middle school mathematics. *Andisheh va Koudak [Thought and Child]*, 16(1), 167–197. [\[Link\]](#) [In Persian]
- Ding, R., Huang, R., & Deng, X. (2023). Multiple pathways for developing functional thinking in elementary mathematics textbooks: A case study in China. *Educational Studies in Mathematics, 114*(2), 223–241. [\[Link\]](#)
- Eskandari, M., Reyhani, E., & Izadi, M. (2024). The probability concept in elementary mathematics textbooks: An analytical look at the concepts and tasks' cognitive demand levels. *A new approach to children's education quarterly, 6*(3), 53-69. [\[Link\]](#) [In Persian]
- Kaplan, O. (2025). Does algebra curriculum develop cognitively advanced critical minds? Comparative analysis of Türkiye and the US mathematics textbooks. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi, 24*(3), 1297–1320. [\[Link\]](#)
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Routledge.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139–151.
- Kim, H., & Kim, H. J. (2025). Towards functional thinking in elementary mathematics: An analysis of pattern generalization tasks in Korea and US elementary mathematics textbooks. *Mathematical Education, 64*(2), 133–153. [\[Link\]](#)
- Khosrowshāhi, L., & Hossein Asghari, A. (2016). Appropriate contexts for algebraization at primary school level, along with content analysis of Iranian primary school math textbooks based on the proposed framework. *Educational Innovations, 15*(3), 147-170. [\[Link\]](#) [In Persian]
- Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M., & Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan, 97*(6), 65–68. [\[Link\]](#)
- Kusumaningsih, W., Darhim, D., Herman, T., & Turmudi, T. (2018). Gender differences in algebraic thinking ability to solve mathematics problems. *Journal of Physics: Conference Series, 1013*(1), 012143. [\[Link\]](#)
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57–94). Erlbaum.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. U.S. Department of Education.
- Nawrozi, W., Adib, Y., Yari Haj Atalou, J. & Badri Gargari, R. (2024). Investigating the position philosophy for Children Curriculum with the orientation of multicultural education in of Elementary Farsi Textbooks using Shannon entropy technique. *Educational and Scholastic studies, 13*(1), 263-276. [\[Link\]](#) [In Persian]
- Papadopoulos, I., & Patsiala, N. (2019). When the "Tug-of-War" game facilitates the development of algebraic thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(7), 1401–1421. [\[Link\]](#)
- Pitta-Pantazi, D., Chimoni, M., & Christou, C. (2025). Revisiting the relationship of arithmetical thinking and letter-symbolic algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 23*(2), 689–711. [\[Link\]](#)
- Raei, F. & Kazemi, M. B. (2025). Content analysis of elementary mathematics textbooks in situations based on approximation and estimation. *Educational and Scholastic Studies, 14*(3), 129-143. [\[Link\]](#) [In Persian]

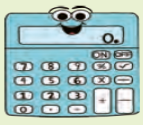
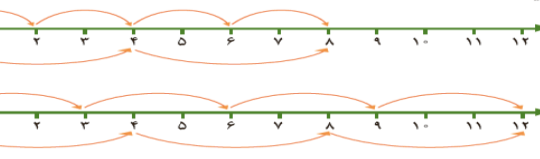
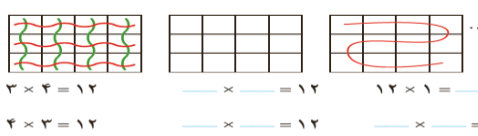
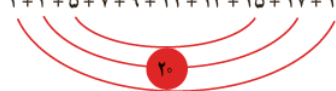
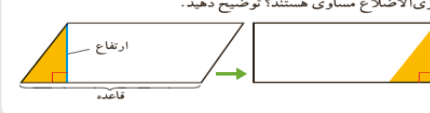
- Rezaei, M., & Zoheiri, M. (2021). Content Analysis of Human and Environmental Textbook Eleventh Grade of High School Based on environmental components by Shannon entropy method. *Environmental Science Studies*, 6(2), 3710-3719. [[Link](#)] [In Persian]
- Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M. A., Macedo, S., & Nicéas, L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Research in Mathematics Education*, 29(4), 422–435. [[Link](#)]
- Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(1), em2065. [[Link](#)]
- Sibiya, M. R., Sekao, D., & Ogonnaya, U. (2025). Algebraic question types in Grade 10 mathematics textbook: A cognitive perspective. *Studies in Learning and Teaching*, 6(1), 1–13. [[Link](#)]
- Shirzadi, Z. & Vahidi, Z. (2024). Analysis of the content of Persian and study books for the sixth grade in order to pay attention to the components of professional ethics. *Research and Innovation in Primary Education*, 5(10), 127-142. [[Link](#)] [In Persian]
- Sunwoo, J., & Yeo, S. (2025). A study on developing tasks to measure algebraic thinking for elementary school students: A hierarchical factor analysis. *Mathematical Education*, 64(3), 399–416. [[Link](#)]
- Taeri, B. (2016). Foundation of Algebr. Isfahan: IUT Publication. [[Link](#)] [In Persian]
- Wilkie, K. J., & Hopkins, S. (2024). Generalizing actions with the subtraction-compensation property: Primary students' algebraic thinking with tasks involving vertical towers of blocks. *Educational Studies in Mathematics*, 115(3), 433–458. [[Link](#)]
- Zare, M. & Baratali, M. (2021). The effect of brain-based teaching-learning strategies on learning mathematics and science of first grade of elementary school students in Isfahan city. *Research and Innovation in Primary Education*, 3(5), 18-27. [[Link](#)] [In Persian]

پیوست

به دلیل محدودیت فضا و اجتناب از طولانی شدن بیش از حد مقاله، در اینجا نمونه‌ای از موقعیت‌ها، که سه مورد در هر پایه است، ارائه شده. جدول کامل شامل تمام ۶۷ موقعیت در صورت نیاز در دسترس است و، در صورت تأیید مجله، به‌عنوان پیوست قابل ارائه می‌باشد.

جدول ۷. نمونه‌ای از فهرست موقعیت‌های شناسایی شده

ردیف	مثال کتاب درسی ریاضی	پایه و صفحه	تفکر جبری
۱	بشمار و بگو. توضیح: $5+3=3+5$	اول ۷۴	مسائل کلامی
۲	بشمار و بنویس. توضیح: برای پر کردن جدول می‌توان از خاصیت جابه‌جایی استفاده کرد. دو عدد پیدا کن که جمع آن‌ها برابر با عددی باشد که بالای ستون آن‌ها نوشته شده باشد.	اول ۸۷	مسائل کلامی
۳	دو عدد پیدا کن که جمع آن‌ها برابر با عددی باشد که بالای ستون آن‌ها نوشته شده باشد.	اول ۹۰	مسائل کلامی
۴	جدول‌های جمع و تفریق را کامل کنید. می‌توانید از محور زیر کمک بگیرید. 	دوم ۲۵	مفهوم‌سازی نماد تساوی
۵	حاصل جمع‌های زیر ۶ می‌شود. مانند نمونه جمع‌هایی را بنویسید که حاصل جمع برابر ۶ شود. $0+6=6$ $4+2=6$ $2+4=6$ $______ + ______ = ______$	دوم ۲۶	مفهوم‌سازی نماد تساوی
۶	۳- این جمع‌ها را با یک نظم مشخص در جدول زیر بنویسید. 	دوم ۲۶	مفهوم‌سازی نماد تساوی

تعمیم قوانین حساب	سوم ۱۲	به کمک ماشین حساب یا به طور ذهنی جواب جمع های زیر را پیدا کنید. $4+7+5+3=$ $3+4+7+5=$ با دیدن حاصل جمع ها چه نتیجه ای می گیرید؟ حالا حاصل جمع های زیر را حساب کنید. سعی کنید با کنار هم قرار دادن عددهای مناسب، حاصل را به طور ذهنی به دست آورید. $2+5+8+5=$ $7+8+3+2+5=$ $4+6+7+1+2=$ $1+2+3+7+8+9=$ خلاق باش  ۱۲	۷
الگویابی	سوم ۲۶	۳- جمع دو عدد را که حاصل جمع آن ها ۱۲ باشد، به چند حالت می توانیم بنویسیم؟ $+ \square = 12$ $1 + \square = 12$ وقتی در یک مسئله تمام حالت های ممکن خواسته شود، به یاد راهبرد «الگویابی» می افتیم. پس تلاش می کنیم با نظم و ترتیب مشخص تمام حالت ها را به دست آوریم.  ۲۶	۸
الگویابی	سوم ۶۶	۳- تساوی ضرب را با کمک محور ها بنویسید.  ۶۶	۹
مفهوم سازی نماد تساوی	چهارم ۴۶	حل مسئله ۱- آموزگار از دانش آموزان خواست دو عدد بگویند که حاصل ضربشان ۱۲ شود. محمود از صفحه ی شطرنجی روبه رو استفاده کرد. او شکل را دسته بندی کرد؛ تعداد مربع های دسته ها با هم برابر بود. سپس برای هر شکل دو ضرب نوشت. کار او را کامل کنید.  $3 \times 4 = 12$ $4 \times 3 = 12$ $\square \times \square = 12$ $\square \times \square = 12$ $12 \times 1 =$ $\square \times \square =$	۱۰
تعمیم قوانین حساب	چهارم ۷۳	۸- با توجه به دسته بندی انجام شده روی عبارت، حاصل جمع عددهای زیر را به دست آورید. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=$  ۲۰	۱۱
تعمیم قوانین حساب	چهارم ۱۳۱	۳- با توجه به سوال های بالا و شکل های زیر، توضیح دهید که چگونه می توان مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کرد. یک متوازی الاضلاع روی مقوا رسم کنید و دور آن را با قیچی ببرید، فعالیت زیر را روی مقوای بریده شده انجام دهید. آیا در شکل، مساحت مستطیل و مساحت متوازی الاضلاع مساوی هستند؟ توضیح دهید.  ارتفاع قاعده مساحت متوازی الاضلاع = $\square \times \square$ ۱۳۱	۱۲
تعمیم قوانین حساب	پنجم ۳۹	۸- آیا حاصل $3 + \frac{1}{4}$ با حاصل $\frac{1}{4} + 3$ مساوی است؟ دلیل بیاورید. ۳۹	۱۳
مفهوم سازی نماد تساوی	پنجم ۱۰۱	۸- برای هر حاصل ضرب، عامل های ضرب متفاوتی بنویسید. $\square \times \square = 0/4$ $\square \times \square = 0/4$ $\square \times \square = 0/4$ $\square \times \square = 7/2$ $\square \times \square = 7/2$ $\square \times \square = 7/2$ ۱۰۱	۱۴

تعمیم قوانین حساب	پنجم ۱۰۳	ناهید: باید حاصل $2 + \frac{1}{3}$ را پیدا کنیم؛ یعنی نصف عدد $\frac{1}{3}$ را. به جای این کار می‌توانیم $\frac{1}{3}$ عدد $\frac{1}{3}$ را پیدا کنیم. پس، $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ کافی است دو عدد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{6}$ را در هم ضرب کنیم؛ یعنی:	۱۵
مفهوم‌سازی نماد تساوی	ششم ۲۷	۹- در جاهای خالی اعدادی بنویسید که رابطه درست باشد. $\frac{2}{3} \times \square = \frac{1}{4} \times \square$ $\frac{2}{3} \times \square < \frac{1}{4} \times \square$ $\frac{2}{3} \times \square > \frac{1}{4} \times \square$ ۳۷	۱۶
مفهوم‌سازی نماد تساوی	ششم ۳۱	۹- با قرار دادن عددهای مختلف در جاهای خالی کسرهایی بیابید که حاصل ضرب آنها $\frac{8}{15}$ شود. $\square \times \square = \frac{8}{15}$ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.	۱۷
تعمیم قوانین حساب	ششم ۴۰	۳- آیا حاصل تقسیم‌های روبه‌رو برابر است؟ چرا؟ $1 \div \frac{1}{5} \quad \text{و} \quad \frac{1}{5} \div 1$	۱۸

جدول ۸. جدول توافق کدگذاران برای محاسبه ضریب کاپای کوهن

مؤلفه تفکر جبری	درصد توافق	تعداد موارد اختلاف	تعداد موارد توافق
مسائل کلامی	۱۰۰٪	۰	۲۰
الگویابی	۹۰٪	۲	۱۸
مفهوم‌سازی نماد تساوی	۹۵٪	۱	۱۹
تعمیم قوانین حساب	۹۵٪	۱	۱۹
مجموع	۹۵٪	۴	۷۶

توضیح: تعداد کل موارد بررسی‌شده در پایایی ۲۰ موقعیت. هر موقعیت می‌توانست به بیش از یک مؤلفه تعلق داشته باشد، بنابراین، مجموع توافق‌ها بیش از ۲۰ است. ضریب کاپای کوهن محاسبه‌شده برابر با 0.87 (توافق عالی) می‌باشد.

جدول ۹. سطوح بازنمایی

سطح بازنمایی	معیار عملیاتی
سطح ۱: اجرایی	دانش‌آموز صرفاً عملیات را تشخیص می‌دهد یا پاسخ را پیدا می‌کند.
سطح ۲: رابطه‌ای	رابطه میان دو عبارت/نمایش مورد توجه قرار می‌گیرد.
سطح ۳: کاربردی	خاصیت در یک موقعیت مشخص به کار گرفته می‌شود.
سطح ۴: استدلال و اکتشاف	دانش‌آموز باید با استدلال رابطه یا خاصیت را از مثال‌ها کشف کند.
سطح ۵: تعمیمی	دانش‌آموز قاعده را در موارد جدید تعمیم داده و با کلام یا نماد بیان می‌کند.