Research in Mathematics Education
https://rme.cfu.ac.ir

A SOLO Taxonomy-Based Analysis of the 2026 Final Mathematics 3 Examination Questions

Safoura Madady Moghadam [1] , Razieh Naroui [2]

[1] Mathematics teacher of the upper secondary school in the 1st district of Rasht, Iran.
(Corresponding Author) madadi.safoora@yahoo.com
[2] Mathematics teacher of the upper secondary school in the 11st district of Tehran, Iran.

ABSTRACT

The SOLO taxonomy is recognized as one of the most credible frameworks for analyzing cognitive structures in educational resources and assessments. Given the current educational system—where national final exams account for 60% of university admission criteria in Iran—these exams play a decisive role in students' academic futures, making the evaluation of their quality and cognitive depth an essential necessity. This study aims to analyze the cognitive levels of questions in the Grade 12 Experimental Sciences Mathematics 3 final exam administered in July 2026. Employing a descriptive-analytical method, the study analyzes data based on official answer keys and detailed scoring rubrics provided by the Center for Assessment and Quality Assurance of the Ministry of Education. Because certain questions contained independent sub-questions with different cognitive levels, 17 main questions were broken down into 27 independent units of analysis to ensure analytical precision. Descriptive findings revealed that the distribution of units of analysis is concentrated on the "Multistructural" and "Relational" levels, accounting for 92.6% of the questions (including 97.5% of the total exam score). Furthermore, based on the analysis of correct descriptive answers, the absence of the "Pre-structural" level was expected. The absence of the "Extended Abstract" level also indicates the designer's strict adherence to the textbook framework and avoidance of materials beyond the approved curriculum. Finally, despite the exam's structural coherence in covering relational concepts, it is recommended that future test designs incorporate at least one item with an "Extended Abstract" approach to assess higher-order initiative and abstract thinking capabilities.

Keywords:
Cognitive Levels;
Final Examination;
Grade 12 Experimental;
Mathematics;
National Examination;
Mathematics 3;
Mathematics;
Examination;
SOLO Taxonomy
Levels.

Cite this article: Madady Moghadam, S. and Naroui, R. (2026). A SOLO Taxonomy-Based Analysis of the 2026 Final Mathematics 3 Examination Questions. *Research in Mathematics Education*, 6 (3), p. 83- 100 .
https://doi.org/10.48310/rme.2026.24423.1174

ISSN (Online): 2783-4379

Received:2026/09/09 **;** **Revised:** 2026/11/02 **;** **Accepted:** 2026/11/11

Type of article: Research Article

Publisher: Farhangian University

©2026/authors retain the copyright and full publishing rights

پژوهش در آموزش ریاضی
https:// rme.cfu.ac.ir

تحلیل سؤالات آزمون نهایی ریاضی ۳ سال ۱۴۰۵ بر اساس مدل سولو

صفورا مددی‌مقدم [۱*]، راضیه نارویی [۲]

[۱] دبیر ریاضی دوره دوم متوسطه آموزش و پرورش ناحیه ۱ رشت، ایران. (**نویسنده مسئول**) madadi.safoora@yahoo.com
[۲] دبیر ریاضی دوره دوم متوسطه آموزش و پرورش منطقه ۱۱ تهران، ایران.

چکیده

طبقه‌بندی سولو به‌عنوان یکی از معتبرترین چارچوب‌ها برای تحلیل ساختارهای شناختی در منابع آموزشی و ارزیابی‌ها شناخته می‌شود. از آنجا که در نظام آموزشی کنونی با تأثیر ۶۰ درصدی سوابق تحصیلی، آزمون‌های کشوری نقش تعیین‌کننده‌ای در سرنوشت دانش‌آموزان برای ورود به دانشگاه‌های ایران ایفا می‌کنند، ارزیابی عمق شناختی این آزمون‌ها به یک ضرورت اساسی تبدیل شده‌است. پژوهش حاضر با هدف تحلیل سطوح شناختیِ سؤالات آزمون نهایی ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم علوم تجربی برگزار شده در تیر ۱۴۰۵ انجام گرفته‌است. روش پژوهش توصیفی-تحلیلی است که در آن، با تکیه بر تحلیل پاسخ‌نامه‌های رسمی و ریزبارم‌های مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت آموزش و پرورش، داده‌ها بررسی شده‌اند. با توجه به اینکه برخی سؤالات دارای شاخه‌های مستقل با سطوح شناختی متفاوتی بودند، برای دقت بیشتر در تحلیل، ۱۷ سؤال اصلی در قالب ۲۷ واحد تحلیل مستقل مورد ارزیابی قرار گرفتند. یافته‌های توصیفی نشان داد که توزیع فراوانی واحدهای تحلیل بر دو سطح «چند ساختاری» و «رابطه‌ای» متمرکز است، به‌طوری که ۹۲/۶ درصد از سؤالات (شامل ۹۷/۵ درصد از کل نمره‌ی آزمون) در این دو سطح جای گرفته‌اند. همچنین با توجه به تحلیل پاسخ‌های تشریحی درست، عدم مشاهده سطح «پیش ساختاری» قابل انتظار است. غیبتِ سطحِ «انتزاع تعمیم‌یافته» نیز نشان‌دهنده‌ی وفاداری کامل طراحان به چارچوب متن کتاب درسی و اجتناب از خروج از سرفصل‌های مصوب است. در نهایت، با وجود انسجام ساختاری آزمون در پوشش مفاهیم ارتباطی، پیشنهاد می‌شود در طراحی‌های آتی، برای سنجش توانایی‌های ابتکار و تفکر انتزاعیِ بالاتر، گنجاندن حداقل یک سؤال با رویکرد «انتزاع تعمیم‌یافته» مد نظر طراحان سوال قرار گیرد

واژه‌های کلیدی
آزمون ریاضی،
آزمون کشوری،
آزمون نهایی،
ریاضی ۳،
ریاضی دوازدهم تجربی،
سطوح شناختی،
سطوح طبقه‌بندی سولو.

استناد به این مقاله: مددی‌مقدم، صفورا و نارویی، راضیه . (۱۴۰۵). تحلیل سؤالات آزمون نهایی ریاضی ۳ سال ۱۴۰۵ بر اساس مدل سولو، *پژوهش در آموزش ریاضی*، ۶ (۳)، ص ۱۰۰- ۸۳ . https://doi.org/10.48310/rme.2026.24423.1174

شاپا الکترونیکی: ۴۳۷۹- ۲۷۸۳

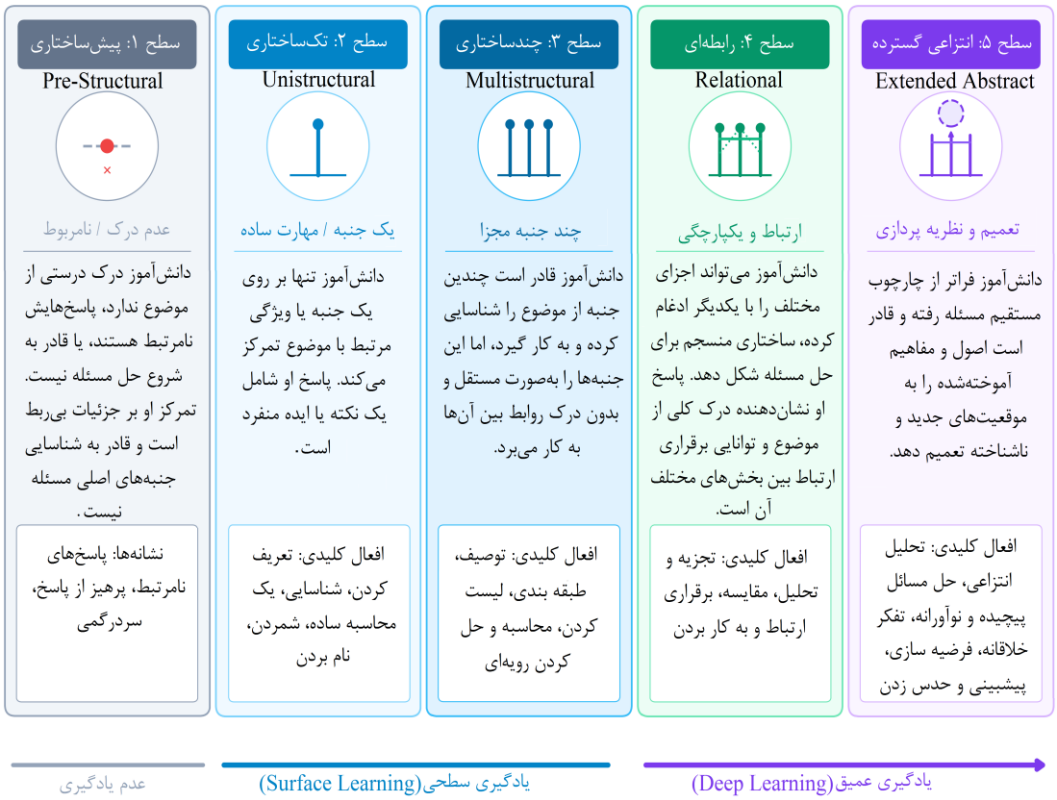
تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۶/۱۸ **تاریخ بازنگری:** ۱۴۰۵/۰۸/۱۱ **تاریخ پذیرش:** ۱۴۰۵/۰۸/۲۰

نوع مقاله: پژوهشی **ناشر**: دانشگاه فرهنگیان

۱۴۰۵©/ نویسندگان دارندهٔ حق‌مؤلف مقالهٔ خود بدون محدودیت هستند.

مقدمه

نظام‌های آموزشی مدرن، بر گذار از «حافظه‌محوری» به سمت «سنجش سطوح بالای شناختی» تأکید ویژه‌ای دارند. در این میان، درس ریاضی ۳ به دلیل نقش تعیین‌کننده در سرنوشت تحصیلی دانش‌آموزان و وزن قابل‌توجه آن در سوابق تحصیلی (۶۰ درصد تأثیر قطعی در کنکور)، به یکی از حساس‌ترین آزمون‌ها تبدیل شده است. ارزشیابی در این درس، نه تنها سنجش دانش ریاضی، بلکه ابزاری برای ارزیابی توانایی‌های تحلیل و استدلال دانش‌آموزان در مسیر ورود به دانشگاه است. از این‌رو، اطمینان از همسویی طراحی سؤالات با سطوح مختلف شناختی، ضرورتی اجتناب‌ناپذیر است.



شکل ۱. سلسله‌مراتب شناختی، نمادهای ساختاری و گذار از یادگیری سطحی به عمیق در طبقه‌بندی سولو (اقتباس از بیگز و کولیس، ۱۹۸۲)

برای تحلیل دقیق این ساختارهای شناختی، از مدل «ساختار یادگیری مشاهده شده[1]» استفاده شده است. در واقع مدل سولو می‌گوید: ما نمی‌توانیم مستقیماً به داخل مغز دانش‌آموز نگاه کنیم تا ببینیم که او چقدر یاد گرفته است؛ بلکه فقط می‌توانیم ساختارِ پاسخ‌های او را مشاهده کنیم و از روی آن، سطح یادگیری‌اش را حدس بزنیم. این مدل که نخستین بار توسط بیگز و کالیس (۱۹۸۲) معرفی شد، سطوح شناختی را در یک سلسله‌مراتب پیوسته تبیین می‌کند: سطح «پیش ساختاری» که در آن دانش‌آموز درک درستی از موضوع ندارد، پاسخ‌هایش نامرتبط هستند، یا قادر به شروع برای حل مسئله نیست. تمرکز او بر جزئیات بی‌ربط است و قادر به شناسایی جنبه‌های اصلی مسئله نیست؛ سطح «تک ساختاری» که در آن دانش‌آموز تنها بر روی یک جنبه یا ویژگی مرتبط با موضوع تمرکز می‌کند. پاسخ او شامل یک نکته یا ایده منفرد است. مسائلی که پاسخ‌های درست آن‌ها شامل تعریف کردن، شناسایی کردن، یک محاسبه ساده، شمردن یا نام بردن باشد، در این سطح قرار می‌گیرند؛ سطح «چند ساختاری» که در آن دانش‌آموز قادر

[1] SOLO Taxonomy

است چندین جنبه یا ویژگی مرتبط از موضوع را شناسایی کرده و به کار گیرد، اما این جنبه‌ها را به‌صورت مستقل و بدون درک روابط بین آن‌ها به کار می‌برد. پاسخ او ممکن است جامع باشد، اما انسجام لازم را ندارد یا نیازی به برقراری ارتباط عمیق منطقی بین جنبه‌ها یا بخش‌های مختلف حل سوال برای رسیدن به پاسخ درست ندارد. مسائلی که پاسخ‌های درست آن‌ها شامل توصیف کردن، طبقه بندی کردن، لیست کردن، محاسبه کردن و حل کردن رویه‌ای باشد، در این سطح قرار می‌گیرند؛ سطح «رابطه‌ای» که در آن دانش‌آموز می‌تواند اجزای مختلف را با یکدیگر ادغام کرده، روابط بین آن‌ها را درک کند و ساختاری منسجم برای حل مسئله شکل دهد. پاسخ دانش‌آموز در این سطح نشان‌دهنده درک کلی از موضوع و توانایی برقراری ارتباط بین بخش‌های مختلف آن است. مسائلی که پاسخ‌های درست آن‌ها نیازمند تجزیه و تحلیل کردن، مقایسه کردن، برقراری ارتباط و به کار بردن باشد، در این سطح قرار می‌گیرند؛ و در نهایت سطح «انتزاعی تعمیم‌یافته» که بالاترین سطح یادگیری است که در آن دانش‌آموز فراتر از چارچوب مستقیم مسئله رفته و قادر است اصول و مفاهیم آموخته‌شده را به موقعیت‌های جدید و ناشناخته تعمیم دهد. این سطح شامل تحلیل انتزاعی، حل مسائل پیچیده و نوآورانه، تفکر خلاقانه، فرضیه سازی، پیشبینی و حدس زدن است.

با توجه به اهمیت آزمون‌های کشوری در ورودی دانشگاه‌ها در ایران، پژوهش حاضر با هدف تحلیل توصیفی-تحلیلی سؤالات آزمون نهایی ریاضی ۳ برگزار شده در تیر ۱۴۰۵ تدوین شده است. در این مطالعه از «ریزبارم‌های رسمی» منتشر شده توسط مرکز ارزیابی و تضمین کیفیت استفاده می‌کنیم که امکان تطبیق دقیقِ فرآیندهای ذهنی مورد انتظار طراحان سوال با سطوح سولو را فراهم می‌آورد. بدین‌سان، این تحقیق در پی پاسخ به این پرسش است که آزمون نهایی ریاضی ۳ برگزار شده در تیر ۱۴۰۵ تا چه حد توانسته است سطوح مختلف شناختی را پوشش دهد و آیا توزیع سؤالات، بستری مناسب برای سنجش انواع توانمندی‌های دانش‌آموزان فراهم کرده است یا خیر.

پیشینه پژوهش

نظریه سولو به‌عنوان یکی از چارچوب‌های نظری مستحکم در تحلیل سطوح پیچیدگی شناختی یادگیری، نخستین بار توسط بیگس و کالیس در **Error! Reference source not found.** ارائه شد. در دهه‌های اخیر، این مدل در حوزه‌های مختلف آموزش ریاضی به‌طور گسترده‌ای توسعه یافته و اعتبارسنجی شده است. پژوهش‌های اخیر به خوبی نشان‌دهنده‌ی کارایی این نظریه در بهبود کیفیت نظام‌های سنجش هستند؛ به گونه‌ای که مائمونا و همکاران در **Error! Reference source not found.** با بهره‌گیری از طبقه‌بندی سولو، به تحلیل و بازنگری ابزارهای آزمون در برنامه‌های درسی نوین پرداخته‌اند. علاوه بر این، در مطالعات اخیر، فرناندز و گوزون در **Error! Reference source not found.** نشان داده‌اند که استفاده از روبریک‌های طراحی‌شده بر اساس سولو، ابزاری بسیار دقیق برای سنجش درک مفهومی در حوزه‌ی حساب دیفرانسیل و انتگرال است که می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های سنتی سنجش باشد.

در پژوهش‌های داخلی، استفاده از این چارچوب برای ارزیابی کتب درسی و عملکرد دانش‌آموزان در مقاطع مختلف آموزشی مورد توجه بوده است. در حوزه تحلیل محتوای کتاب‌های درسی، محبت‌پناه و یافتیان در **Error! Reference source not found.** به ارزیابی کتاب ریاضی پایه ششم بر اساس این مدل پرداخته و پتانسیل‌های آن را برای توسعه تفکر ریاضی بررسی کرده‌اند. در همین راستا، مطالعاتی بر روی محتوای کتب دوره اول متوسطه نظیر تحلیل کتاب ریاضی پایه هشتم در **Error! Reference source not found.** نیز صورت گرفته است که همگی آن‌ها نشان از تلاش برای انطباق سطوح شناختیِ محتوا با سلسله‌مراتب سولو دارند.

در حوزه سنجش و ارزیابی آزمون‌ها، پژوهشگران با رویکردهای متفاوتی به تحلیل آزمون‌های ریاضی پرداخته‌اند. برای نمونه، در پژوهش **Error! Reference source not found.** انجام شده توسط خزاعی، توزیع سطوح شناختی آزمون نهایی ریاضی دهم خرداد سال ۱۴۰۳ مورد واکاوی قرار گرفته است. همچنین، مطالعه **Error!**

Reference source not found. توسط کمیجانی و همکارانش پیرامون ارزیابی سواد آماری دانش‌آموزان پایه یازدهم ریاضی، جایگاه این دانش‌آموزان را در سلسله‌مراتب یادگیری سولو تبیین کرده است. در حوزه آموزش هندسه، که یکی از محورهای کلیدی تفکر انتزاعی است، محبت‌پناه و یافتیان در پژوهش **Error! Reference source not found.** ظرفیت‌های نظریه سولو را در شناسایی سطح تفکر هندسی دانش‌آموزان پایه هشتم به‌کار بسته‌اند. در کنار این پژوهش، مطالعه **Error! Reference source not found.** نیز به تبیین نظری و کاربردی این الگو در آموزش هندسه پرداخته است. افزون بر این، مطالعه عملکرد دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه در حل یک تکلیف توانایی فضایی با استفاده از نظریه سولو در پژوهش **Error! Reference source not found.** توسط حق‌جو و ریحانی، نشان داد که نوع بازنمایی‌های ذهنی با سطوح سولو همبستگی معناداری دارد. در زمینه بهبود رویکردهای آموزشی نیز، عالمیان و خلیلی در پژوهش **Error! Reference source not found.** نشان دادند که استفاده از بازنمایی‌های چندگانه در مبحث معادله و معادله خط، می‌تواند پاسخ‌دهی دانش‌آموزان را به سطوح رابطه‌ای و انتزاعی ارتقا دهد.

با وجود گستره‌ی پژوهش‌های انجام‌شده بر روی کتب درسی و دوره‌های تحصیلی مختلف، جای خالی تحلیلی جامع بر روی آزمون‌های نهایی دوره دوم متوسطه، به‌ویژه سال تحصیلی دوازدهم که نقش سرنوشت‌سازی را در ورود دانش‌آموزان به دانشگاه‌های ایران دارد، در ادبیات پژوهشیِ ایران محسوس است. پژوهش حاضر با هدف پر کردن این شکاف، قصد دارد با بهره‌گیری از چارچوب نظریِ سولو، ساختار شناختی آزمون ریاضی ۳ تیر سال ۱۴۰۵ را مورد واکاوی قرار داده و میزان همسویی این آزمون‌ها را با سطوح عالی تفکر ریاضی و استانداردهای آموزشی ارزیابی نماید.

روش

در این پژوهش، سؤالات آزمون نهایی درس ریاضی ۳ پایه دوازدهم برگزار شده در تیر ماه سال ۱۴۰۵، به عنوان داده‌های اصلی انتخاب شدند و تلاش بر آن است تا با تحلیل شناختی سؤالات این آزمون پاسخ‌های زیر استخراج شود:

- سطوح شناختی سؤالات بر اساس مدل سولو چگونه توزیع شده‌اند؟
- ساختار شناختی سؤالات از نظر میزان پیچیدگی و درگیری ذهنی دانش‌آموز در چه سطوحی قرار دارد؟

واحد تحلیل[1] در این پژوهش، شاخه‌ها یا همان زیرسؤال‌های (بخش‌های الف، ب، ...) در نظر گرفته شد. این رویکرد به این دلیل اتخاذ گردید که در برخی از سؤالات این آزمون، هر شاخه در سطح متفاوتی از طبقه‌بندی سولو قرار می‌گرفت؛ لذا برای تحلیل دقیق‌تر، هر شاخه به عنوان یک واحد مستقل بررسی و در نظر گرفته شد.

به منظور ارتقای پایایی تحلیل محتوا و کاهش احتمال سوگیری[2] پژوهشگر در تشخیص سطوح شناختی، از روش اعتبارسنجی متقاطع[3] استفاده شد. در این فرآیند، پس از انجام تحلیل اولیه توسط پژوهشگر، برای بررسی هم‌خوانی نتایج، از یک مدل زبانی بزرگ[4] به‌عنوان ابزار مکمل استفاده گردید. شایان ذکر است که در این مرحله، از هوش مصنوعی برای حل مسائل ریاضی استفاده نشده است؛ بلکه جهت اطمینان از دقت تشخیص سطوح، پاسخ‌های تشریحی و ریزبارم‌های رسمی منتشر شده توسط مرکز ارزیابی و تضمین کیفیت آموزش و پرورش که شامل تشریح کامل فرآیند حل مسئله است برای مدل ارائه و جهت تطبیق سطح شناختی سؤال با مدل سولو مورد استفاده قرار گرفت. این رویکرد باعث شد تا هوش مصنوعی صرفاً در نقش یک ارزیاب مستقل برای صحت‌سنجی سطوح شناختی بر اساس پاسخ‌های استاندارد و تشریحی عمل کند.

لازم به ذکر است که به منظور طبقه‌بندی هر واحد تحلیل در سطوح سولو، با توجه به اینکه پاسخ‌های صحیح ارائه شده توسط مرکز ارزیابی و تضمین کیفیت آموزش و پرورش، معیار سنجش این مطالعه بود، بنابراین پاسخ‌های بی‌معنی

[1] Unit of Analysis
[2] Bias
[3] Cross-validation
[4] Large Language Model

و نامربوط که که در طبقه بندی سولو در سطح «پیش ساختاری» قرار میگرفتند، در این تحلیل لحاظ نگردید؛ چراکه طبق مدل سولو، این سطح منجر به رسیدن به پاسخ درست نمی‌شود (بیگز و کولیس، ۱۹۸۲). مسائلی که حل آن‌ها تنها مستلزم استفاده از یک مفهوم، یک تعریف یا شناسایی یک ویژگی واحد است در سطح «تک ساختاری» قرار گرفتند. مسائلی که دانش‌آموز در آن‌ها از چندین داده یا مفهوم مستقل استفاده می‌کند، اما نیازی به برقراری ارتباط منطقی عمیق یا استدلالی میان این مؤلفه‌ها ندارد، بلکه صرفاً باید بتواند چند گزاره‌ی دانشی مجزا را فراخوانی و ترکیب کند تا به پاسخ درست برسد، (مانند فرآیندهای محاسباتیِ صرف یا پیمایشِ رویه‌ای) در سطح «چند ساختاری» قرار گرفتند. مسائلی که حل آن‌ها مستلزم تجزیه و تحلیل، مقایسه، یا ایجاد ارتباط منطقی و ساختارمند میان جنبه‌های مختلف و مؤلفه‌های مسئله است در سطح «رابطه‌ای» قرار گرفتند. در سطح «انتزاع تعمیم یافته» نیاز به تعمیم نتایج، تدوین روش جدید، ابداع و ابتکار و فرا رفتن از سطح مسئله دارد.

در برخی موارد که پاسخ به سوال مستلزم تحلیل ساختار مفاهیم در ذهن دانش‌آموز بود (مانند سوالات درست/نادرست)، کدگذاری بر اساس «ظرفیت شناختی مورد نیاز برای حل مسئله» انجام شد، نه صرفاً بر اساس «حجم پاسخِ مکتوبِ دانش‌آموز». به این معنا که دانش‌آموز برای رسیدن به پاسخ درست چه فرایند ذهنی را باید طی کند؟

در ادامه، به‌منظور تحلیل شناختی آزمون کشوری ریاضی ۳ برگزار شده در تیر سال ۱۴۰۵، هر شاخه از سوالات به همراه پاسخ تشریحی درست آن در قالب یک شکل مجزا ارائه شده است. همچنین برای هر مورد، سطح تفکر شناختی دانش‌آموز بر اساس مدل سولو تعیین گردیده و استدلال مربوط به طبقه‌بندی صورت‌گرفته به‌صورت مختصر تبیین شده است.

۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) هر تابع صعودی، تابعی یک‌به‌یک است.	۰/۲۵

پاسخ: نادرست

شکل ۲. سوال ۱ قسمت الف

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): در این سوال دانش‌آموز باید بتواند در ذهن خود بین مفاهیم «یک نوایی» و «یک به یک بودن» رابطه برقرار کند. او همچنین باید در ذهن خود تجزیه و تحلیل کند که بین مفاهیم «یک نوایی» و «یک نوایی اکید» تفاوت وجود دارد. هر تابع اکیداً یکنوا، لزوماً یک به یک است. اما تابع یکنوا ممکن است بخش «تابع ثابت» را نیز در خود داشته باشد که باعث عدم یک به یک بودن آن شود.

۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ ، تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست.	۰/۲۵

پاسخ: نادرست

شکل ۳. سوال ۱ قسمت ب

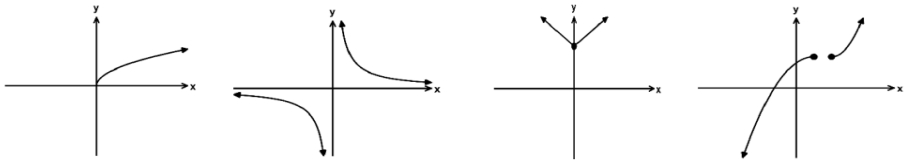
از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): در این سوالکافی است دانش‌آموز بداند؛ اولاً: ترکیب هر تابع با وارونش برابر با تابع همانی است، دوماً: (به جز خود تابع همانی) هیچ تابعی با وارون خود برابر نیست. برای آنکه دانش‌آموز به این سوال پاسخ درست دهد، احتیاجی ندارد بین این دو مفهوم رابطه خاصی قرار دهد، بنابراین سوال در سطح رابطه‌ای قرار نمی‌گیرد بلکه به سمت سطح چند ساختاری سوق پیدا می‌کند.

۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. پ) اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، آنگاه $\tan\alpha>\sin\alpha$.	۰/۲۵

پاسخ: درست

شکل ۴. سوال ۱ قسمت پ

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): دانش‌آموز باید بداند سوال به ربع اول دایره مثلثاتی اشاره دارد و همچنین باید بتواند در این ربع، محورهای «تانژانت» و «سینوس» را با هم مقایسه کند. این مقایسه، سطح سوال را به سمت رابطه‌ای سوق می‌دهد.

۲	برای هریک از سؤالات زیرگزینهٔ درست را انتخاب کنید و شمارهٔ آن گزینه را در پاسخبرگ بنویسید. الف) درکدام‌یک از نمودارهای زیر تابع رسم شده اکیداً یکنواست؟ ۱) ۲) ۳) ۴) 	۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

شکل ۵. سوال ۲ قسمت الف

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): درست است که شناسایی کردن تابع یکنوا، کافی است. اما دانش‌آموز بین گزینه‌های (۱) و (۴) به شک خواهد افتاد. بنابراین او باید هر دو مفهوم «یکنوایی» و «اکیداً یکنوایی» را بداند.

۲	برای هریک از سؤالات زیرگزینهٔ درست را انتخاب کنید و شمارهٔ آن گزینه را در پاسخبرگ بنویسید. ب) نقطهٔ $A(۴,۶)$ روی نمودار تابع $f(x)$ با کدام نقطه روی نمودار $y=f(۲x)$ متناظر است؟ ۱) $A'(۴,۱۲)$ ۲) $A'(۴,۳)$ ۳) $A'(۲,۶)$ ۴) $A'(۸,۶)$	۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳

شکل ۶. سوال ۲ قسمت ب

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): طبق قاعده کتاب ریاضی ۳، دانش‌آموز می‌داند؛ اولاً: طول نقطه باید به ۲ تقسیم شود، دوماً: عرض نقطه ثابت باقی می‌ماند. بنابراین طول و عرض نقطه جدید برای او قابل محاسبه هستند و احتیاجی نیز به برقراری ارتباط بین طول و عرض ندارد زیرا در گزینه‌ها طول و عرض هر نقطه به صورت مجزا برای او نمایش داده شده‌اند.

۳	اگر $f(x)=۳x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$، آنگاه دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.	۱/۲۵

پاسخ:

$D_f=\mathbb{R}$ (۰/۲۵) $\quad D_g=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۲\}=[۲,+\infty)$ (۰/۲۵)

$$\underbrace{D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\{x\in\mathbb{R}\mid ۳x-۱\geq ۲\}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۱\}=[۱,+\infty)}_{(۰/۲۵)}$$

شکل ۷. سوال ۳

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): دانش‌آموز باید تجزیه و تحلیل کند که برای محاسبه دامنه یک تابع ترکیبی، خروجیِ یک تابع، نقشِ ورودیِ تابع دیگر را بازی می‌کند. این یک درکِ ارتباطی بین خروجی یک تابع و دامنه تابع دیگر است.

۴	ضابطهٔ تابع وارون تابع یک‌به‌یک $f(x)=۲-x^۳$ را بیابید.	۰/۷۵

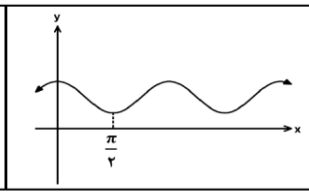
پاسخ:

$x^۳=۲-y$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲-y}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۲-x}$ (۰/۲۵)

شکل ۸. سوال ۴

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): دانش‌آموز با یک محاسبه و حل کردن رویه‌ای رو به رو است. چندین گام درست برداشته می‌شود اما پیوند مفهومیِ عمیقی برای حل آن ضروری نیست.

۵	الف) قسمتی از نمودار تابع $y=\cos(bx)+۲$ به‌صورت زیر است. مقدار $\|b\|$ را بیابید.	۰/۷۵



پاسخ:

$\frac{T}{۲}=\frac{\pi}{۲}$ $\Rightarrow$ $T=\pi$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ $\underbrace{|b|=\frac{۲\pi}{T}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$ (۰/۲۵)

شکل ۹. سوال ۵ قسمت الف

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): در این سوال دانش‌آموز باید در ذهن خود تجزیه و تحلیل کند: «چون من می‌بینم که فاصله قله‌ها عدد پی است، پس باید از رابطه مربوط به دوره تناوب استفاده کنم تا مجهول را به دست آورم.» اینجاست که «رابطه» شکل می‌گیرد: او بین «فاصله بصری» و «ضریب جبری» یک پل ارتباطی برقرار می‌کند.

۵	ب) مقدار عددی $۲\sin^۲(۱۵^\circ)-۱$ را به‌دست آورید.	۰/۵

پاسخ:

$\underbrace{۱-۲\sin^۲۱۵=\cos ۳۰}_{(۰/۲۵)}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۰/۲۵)

شکل ۱۰. سوال ۵ قسمت ب

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): در این سوال، اجرای گام‌های الگوریتمی و استفاده از فرمول‌های آماده که کسینوس دو برابر یک زاویه را به سینوس (یا کسینوس) همان زاویه تبدیل می‌کند، برای رسیدن به یک نتیجه عددی، یک حل کردن رویه‌ای با سلسله مراتب مشخص به حساب می‌آید، که مطابق با قراردادهای سطوح طبقه بندی سولو، در سطح چند ساختاری قرار می‌گیرد.

۶	جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $۴\cos(۳x)-۲\sqrt{۲}=۰$ را به‌دست آورید.	۱/۵

پاسخ:

$$\underbrace{\cos ۳x=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۴}}_{(۰/۲۵)} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} & k\in\mathbb{Z} \quad (۰/۲۵) \\ ۳x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} & k\in\mathbb{Z} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲} & k\in\mathbb{Z} \quad (۰/۲۵) \\ x=\frac{۲k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۲} & k\in\mathbb{Z} \quad (۰/۲۵) \end{cases}$$

شکل ۱۱. سوال ۶

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): بر اساس تجربه کلاس درس، دانش‌آموز با استفاده از یک الگوریتم مشخص برای حل معادلات مثلثاتی (ایزوله کردن متغیر و اعمال فرمولِ آماده‌ی جواب کلی)، مراحل مجزا را بدون نیاز به تحلیل ساختاریِ عمیق یا پیوند دادن مفاهیمِ غیربدیهی، پشت سر هم اجرا می‌کند.

۷	حدهای زیر را محاسبه کنید.	۱
	الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{\sqrt{x+۳}-۲}$	

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱}\overbrace{\frac{x(x-۱)}{\sqrt{x+۳}-۲}}^{(۰/۲۵)}\times\underbrace{\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۳}+۲}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)\left(\sqrt{x+۳}+۲\right)}{(x-۱)}}_{(۰/۲۵)}=\lim_{x\to ۱}x\left(\sqrt{x+۳}+۲\right)=۴ \ (۰/۲۵)$$

شکل ۱۲. سوال ۷ قسمت الف

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): در این سوال، دانش‌آموز باید چندین مفهوم ریاضی را با هم ادغام کند تا به پاسخ برسد. شناسایی حد مبهم، انتخاب استراتژی مناسب برای رفع ابهام، پیوند مهارت‌های مزدوج‌سازی، تجزیه و فاکتورگیری (در صورت) و سپس ساده‌سازی کسر. او بدون برقراری ارتباط بین همه این مفاهیم در ذهن خود، قادر به حل سوال نخواهد بود.

۷	حدهای زیر را محاسبه کنید.	۰/۵
	ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-۲}{x^۲-۴}$	

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۲}{x^۲-۴}=\frac{-۲}{۰^-}=\underbrace{\pm}_{(۰/۲۵)}\underbrace{\infty}_{(۰/۲۵)}$$

شکل ۱۳. سوال ۷ قسمت ب

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): دانش‌آموز برای حل این سوال، نیاز به درک ساختاری تابع یا تحلیل هندسی آن ندارد. او صرفاً از یک پروتکل جبری پیروی می‌کند. او مفاهیم زیر را به صورت چند مرحله‌ای و یک حل رویه‌ای در ذهن خود اجرا می‌کند و احتیاجی به برقراری ارتباط نیز بین این مفاهیم ندارد:

- جایگذاری عدد داده شده سوال در عبارت تابع مورد نظر و درک مفهوم بی‌نهایت.
- اعمال جهت حد (+ یا −) روی علامت مخرج.
- تشخیص نوع بی‌نهایت (با استفاده از قانون ضرب علامت‌ها).

۷	حدهای زیر را محاسبه کنید. پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^{۲}}{x+۵x^{۲}-۱}$	۰/۵

پاسخ:

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۲}}{۵x^{۲}}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۲}{۵}\ (۰/۲۵)$$

شکل ۱۴. سوال ۷ قسمت پ

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): استدلال بر «فرآیند حل» متمرکز است؛ مسئله نیازمند اجرای گام‌های متوالی (تشخیص، مرتب‌سازی، حذف جملات کم‌اثر و محاسبه) است. با توجه به حل رویه‌ای، این سوال در سطح چند ساختاری قرار می‌گیرد.

۸	اگر خط $y=۴x+a$ در نقطهٔ $A(۱,۴+a)$ بر منحنی تابع $f(x)=x^{۳}+ax+۳$ مماس باشد، مقدار a را بیابید.	۱

پاسخ:

$$\underbrace{f'(۱)=۴}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{۳+a=۴}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow a=۱\ (۰/۲۵)\qquad f'(x)=۳x^{۲}+a\ (۰/۲۵)$$

شکل ۱۵. سوال ۸

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): در این سوال دانش آموز نیازمند تلفیق تعریف هندسی مشتق (شیب خط مماس بر نمودار در نقطه مورد نظر) و تعریف جبری مشتق (محاسبه آن با توجه به تابع داده شده در سوال) است و مراحلِ حل در یک ساختارِ منطقی و وابسته به هم گره خورده‌اند.

۹	تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲} & x>-۱\\ x-۱ & x\le -۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) شیب نیم‌مماس چپ تابع در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.	۰/۷۵

پاسخ:

$$f'_{-}(-۱)=\underbrace{\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{x-۱-(-۲)}{x+۱}}_{(۰/۵)}=۱\ (۰/۲۵)$$

شکل ۱۶. سوال ۹ قسمت الف

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): در این سؤال، دانش‌آموز با یک «محدودیتِ ساختاری» (چپ‌گرا بودنِ مماس) مواجه است. برخلاف تمرین‌های ماشینیِ محاسبه مشتق، اینجا هدف سنجش، درکِ دانش‌آموز از «سازوکارِ تعریف مشتق» در شرایطِ مرزی است. با توجه به اینکه این عمل به درک عمیق و تجزیه و تحلیل دانش‌آموز احتیاج دارد، این سوال به سطح رابطه‌ای مایل می‌شود.

۹	تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲} & x>-۱\\ x-۱ & x\le -۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید. ب) آیا تابع f در بازهٔ $(-۲,۰)$ مشتق‌پذیر است؟	۰/۲۵

پاسخ: خیر (۰/۲۵)

شکل ۱۷. سوال ۹ قسمت ب

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): با وجود آنکه این سوال فقط ۰/۲۵ نمره دارد، اما دانش‌آموز نمی‌تواند فقط با نگاه کردن به بازه پاسخ «خیر» را بدهد. او باید یک «زنجیره‌ی منطقی» در ذهن بسازد:

اگر تابع در نقطه‌ای از بازه ناپیوسته باشد، پس در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است.

اگر در یک نقطه از بازه مشتق‌ناپذیر باشد، پس تابع در آن «بازه» مشتق‌پذیر نیست.
این یعنی دانش‌آموز باید «پیوستگی» و «مشتق‌پذیری» را به هم پیوند دهد.

۱۰	مشتق هریک از توابع زیر را به‌دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	
۱	الف) $f(x)=\frac{\sqrt[۳]{x}}{x^۲-۵}$	

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{\overbrace{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}^{(۰/۲۵)}(x^۲-۵)-\overbrace{۲x}^{(۰/۲۵)}\ \overbrace{(\sqrt[۳]{x})}}{\underbrace{(x^۲-۵)^۲}_{(۰/۲۵)}}\quad (۰/۲۵)$$

شکل ۱۸. سوال ۱۰ قسمت الف

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): دانش‌آموز برای حل این سوال چندین مهارت مستقل (مشتق رادیکال، مشتق چندجمله‌ای و اعمال فرمول مشتق کسر) را پشت سر می‌گذارد. هر گام یک فعالیت مجزا است که برای رسیدن به هدف نهایی کنار هم چیده شده‌اند بدون اینکه نیاز به پیوند مفهومی عمیق یا استدلال باشد.

۱۰	مشتق هریک از توابع زیر را به‌دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	
۰/۷۵	ب) $g(x)=(۳x^۴+۲)^۶$	

پاسخ:

$$g'(x)=\underbrace{۶(۳x^۴+۲)^۵}_{(۰/۲۵)}\underbrace{(۱۲x^۳)}_{(۰/۲۵)}\quad (۰/۲۵)$$

شکل ۱۹. سوال ۱۰ قسمت ب

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): دانش‌آموز برای رسیدن به پاسخ این سوال، ملزم به اجرای دو عملیات مجزا و متوالی است:

۱) اعمال قاعده کُلی مشتق عبارت توان‌دار.
۲) مشتق‌گیری از عبارت درون پرانتز.

حل این سوال یک حل کردن رویه‌ای به حساب می‌آید که دانش‌آموز برای آن، نیاز به برقراری رابطه منطقی عمیق بین دو مرحله یاد شده ندارد.

۱۱	خودرویی طبق معادلهٔ $f(t)=-۵t^۲+۴۰t$ حرکت می‌کند، که در آن $۰\le t\le ۸$ برحسب ثانیه است. الف) سرعت متوسط خودرو را در بازهٔ زمانی $[۱,۴]$ محاسبه کنید.	
۰/۷۵		

پاسخ:

$$\underbrace{\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۸۰-۳۵}{۳}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۴۵}{۳}=۱۵\quad (۰/۲۵)$$

شکل ۲۰. سوال ۱۱ قسمت الف

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): دانش‌آموز باید دو مهارت مجزا را ترکیب کند:

۱) مهارت جبری-عددی: جایگذاری در تابع.
۲) مهارت فرمول‌محور: استفاده از ساختار کسر سرعت متوسط.

۱۱	خودرویی طبق معادلهٔ $f(t)=-۵t^۲+۴۰t$ حرکت می‌کند، که در آن $۰\le t\le ۸$ برحسب ثانیه است. ب) سرعت لحظه‌ای آن را در $t=۳$ بیابید.	۰/۵

پاسخ:

$f'(t)=-۱۰t+۴۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(۳)=-۳۰+۴۰=۱۰$ (۰/۲۵)

شکل ۲۱. سوال ۱۱ قسمت ب

از منظر طبقه بندی سولو: چند ساختاری (۳): دانش‌آموز اول باید از قاعده مشتق‌گیری استفاده کند و سپس محاسبات عددی را انجام دهد. پاسخ این سوال یک حل کردن رویه‌ای به حساب می‌آید که نیازمند تجزیه و تحلیل عمیق یا برقراری ارتباط بین مراحل مختلف نیست.

۱۲	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x)=x^۳-۳x$ بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ را بیابید که تابع در آن اکیداً نزولی باشد.	۱/۲۵

پاسخ:

$\underbrace{f'(x)=۳x^۲-۳}_{(۰/۲۵)}$

$\underbrace{۳x^۲-۳=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow ۳x^۲=۳\Rightarrow x=\pm ۱$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

رسم جدول (۰/۲۵)

با توجه به جدول تغییرات تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ اکیداً نزولی است. (۰/۲۵)

شکل ۲۲. سوال ۱۲

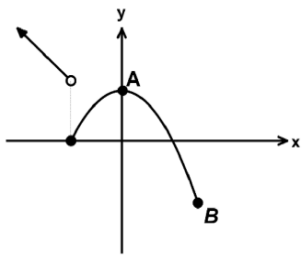
از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): در این سوال، دانش‌آموز برای پاسخ درست باید از مشتق به جدول تغییرات برسد، در این هنگام او صرفاً یک فرمول را جایگذاری نمی‌کند. او باید:

۱) مفهوم مشتق را به عنوان نرخ تغییرات درک کند.

۲) رابطه بین علامت مشتق و جهت نمودار را در ذهن خود بازسازی کند.

۳) اطلاعات پراکنده (نقاط بحرانی، علامت‌ها، بازه‌ها) را در یک ساختار واحد به نام «جدول تغییرات» ادغام کند.

این دقیقاً همان معنای رابطه در سولو است: «ارتباط دادن اجزا به یکدیگر برای ایجاد یک ساختار کلی». اگر دانش‌آموز نتواند این «ارتباط» را برقرار کند، حتی اگر مشتق را درست به دست آورد، باز هم نمی‌تواند جدول تغییرات تابع را به درستی رسم کند یا بازه مورد نظر را از جدول استخراج کند.

۱۳	با توجه به نمودار داده شده، جاهای خالی در جدول زیر را کامل کنید.  **نوع اکسترمم نسبی** (ماکزیمم، مینیمم، نه ماکزیمم ونه مینیمم) **مقدار مشتق** **نقطه** **A** — ماکزیمم نسبی — الف)..... **B** — ب)..... — موجود نیست	۰/۵

پاسخ: الف) موجود است یا صفر (۰/۲۵)

ب) نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی (۰/۲۵)

شکل ۲۳. سوال ۱۳

از منظر طبقه بندی سولو: هر دو بخش الف و ب تک ساختاری (۲): این سوال نیازمند تشخیص‌های ساده و مستقیم از سوی دانش‌آموز است. در بخش اول، تشخیص بصری نقطه به عنوان یک قله هموار، منجر به استنتاج صفر بودن مشتق می‌شود. در بخش دوم، تشخیص نقطه به عنوان نقطه مرزی بازه توسط دانش‌آموز، کافی است تا مشخص شود که این نقطه نمی‌تواند اکسترمم نسبی باشد.

۱۴	مثلثی با قاعدهٔ $x-۴$ که ارتفاع وارد بر آن $۲x$ باشد را در نظر بگیرید. با استفاده از جدول تغییرات، مقدار x را طوری بیابید که این مثلث بیشترین مساحت ممکن را داشته باشد.	۱/۲۵

پاسخ:

$$S=\frac{۱}{۲}(۲x)(۴-x)=۴x-x^{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{S'(x)=۴-۲x=۰}_{(۰/۵)} \Rightarrow x=۲ \quad (۰/۲۵)$$

x		۲	
$S'(x)$	+	۰	−
$S(x)$	↗		↘

رسم جدول (۰/۲۵)

شکل ۲۴. سوال ۱۴

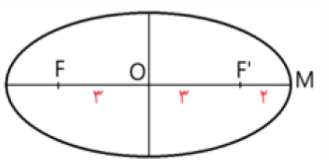
از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): فرآیند حل این سوال، مستلزم فراتر رفتن از اجرای صرفِ الگوریتم مشتق‌گیری است. دانش‌آموز باید ابتدا از طریق مدل‌سازی ریاضی، یک رابطه بین متغیرهای هندسی مطرح شده در سوال (قاعده و ارتفاع) برقرار کند و سپس با استفاده از رسم درست جدول تغییرات، رابطه میان «تغییر علامت مشتق» و «بهینه بودن مقدار تابع» را در یک ساختار منسجم تحلیل نماید. این نیاز به ادغام مفاهیم هندسی و مشتق دارد که ویژگی اصلی سطح رابطه‌ای است.

۱۵	در یک بیضی خروج از مرکز $\frac{۳}{۵}$ و فاصلهٔ کانونی ۶ است. مجموع فواصل نقطهٔ دلخواه $\mathbf{M}$ روی بیضی از دو کانون F و F' را بیابید.	۱/۲۵

پاسخ:

$$\underbrace{FF' = ۲c = ۶}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow c = ۳ \ (۰/۲۵)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow a = ۵ \ (۰/۲۵)$$



چون M نقطه‌ای دلخواه است، آن را بر نقطهٔ A منطبق می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$MF + MF' = (۲ + ۳ + ۳) + ۲ = ۱۰ \ (۰/۵)$$

شکل ۲۵. سوال ۱۵

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): حل این مسئله مستلزم ادغام دو مفهوم کلیدی از هندسه و ریاضیات است: نخست، توانایی استخراج پارامتر اصلی بیضی (نصف قطر بزرگ) از طریق رابطه خروج از مرکز و فاصله کانونی، و دوم، پیوند دادن این پارامتر به تعریف هندسی بیضی (مجموع فواصل نقاط از دو کانون). دانش‌آموز برای پاسخ صحیح، باید فراتر از محاسبات جبری، به «ماهیت تعریف بیضی» به عنوان یک ساختار رابطه‌ای بین نقاط و کانون‌ها آگاه باشد.

۱۶	وضعیت دایرهٔ $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$ را نسبت به دایره‌ای به مرکز $O(۴,۲)$ و شعاع ۳ مشخص کنید.	۱/۲۵

پاسخ:

$O'(۱,-۲)$ $(۰/۲۵)$

$r' = ۲$ $(۰/۲۵)$

$OO' = \sqrt{(۱-۴)^۲ + (-۲-۲)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$ $(۰/۲۵)$

$r + r' = OO'$ $(۰/۲۵) \Rightarrow$ دو دایره مماس بیرون هستند $(۰/۲۵)$

شکل ۲۶. سوال ۱۶

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): دانش‌آموز باید چندین فرآیندِ مجزا را با هم پیوند دهد؛ نخست استخراج پارامترهای هندسی از معادله دایره، دوم محاسبه فاصله بین دو نقطه (دو مرکز) در صفحه مختصات، و در نهایت، ایجاد یک رابطه مقایسه‌ای میان فاصله مراکز با مجموع یا تفاضل شعاع‌ها برای رسیدن به یک نتیجه‌گیری هندسی واحد. این توانایی در «اتصال مفاهیم محاسباتی» برای رسیدن به یک «نتیجه‌ی مفهومی»، ویژگی بارز سطح رابطه‌ای است.

۱۷	در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A و ۳ ساعت دیواری از نوع B وجود دارد و احتمال اینکه عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A برابرِ $\frac{۴}{۵}$ و برای نوع B برابرِ $\frac{۹}{۱۰}$ است. به تصادف یک ساعت از این جعبه بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟	۱/۵

پاسخ:

$$P(C)=\underbrace{P(A)\times P(C|A)+P(B)\times P(C|B)}_{(۰/۲۵)}$$

$$P(C)=\underbrace{\frac{۵}{۸}}_{(۰/۲۵)}\times\underbrace{\frac{۴}{۵}}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{\frac{۳}{۸}}_{(۰/۲۵)}\times\underbrace{\frac{۹}{۱۰}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۶۷}{۸۰}\quad(۰/۲۵)$$

شکل ۲۷. سوال ۱۷

از منظر طبقه بندی سولو: رابطه‌ای (۴): دلیل این طبقه‌بندی، ضرورتِ درک رابطه‌ی بین دو نوع متغیر متفاوت است؛ اول، متغیر «احتمال نوع ساعت» (که بر اساس تعداد در جعبه تعریف می‌شود) و دوم، «احتمال شرطی عمر» (که برای هر نوع ساعت متفاوت است). دانش‌آموز برای رسیدن به پاسخ، نباید صرفاً از یک فرمول مستقیم استفاده کند، بلکه باید بتواند بین احتمال انتخاب هر دسته و احتمال وقوع رویداد در آن دسته، یک رابطه ریاضی (ضرب و سپس جمع) ایجاد کند تا ساختار «احتمال کل» را بازسازی نماید. این فرآیندِ ترکیبِ دو لایه از داده‌های احتمالی برای رسیدن به یک نتیجه‌ی واحد، هسته‌ی اصلی فعالیت ذهنی در سطح رابطه‌ای است.

یافته‌ها

در تبیینِ چگونگیِ ساختارِ تحلیلِ داده‌ها، لازم به ذکر است که از آنجا که در برخی از سؤال‌های آزمون، شاخه‌های مختلف (همچون الف، ب، و پ) هر یک در سطوح متفاوتی از طبقه‌بندی سولو جای می‌گرفتند، امکان ادغام آن‌ها وجود نداشت؛ لذا هر شاخه به‌عنوان یک «واحد تحلیل مستقل» در نظر گرفته شد. بر همین اساس، از مجموع ۱۷ سؤال اصلی آزمون، تعداد ۲۷ واحد تحلیلِ متمایز استخراج و مورد ارزیابی قرار گرفت.

جدول ۱ توزیع فراوانی و درصدِ پاسخ‌های درست آزمون کشوری ریاضی ۳ برگزار شده در تیر ۱۴۰۵ را به تفکیکِ سطوحِ پنج‌گانه‌ی طبقه‌بندی سولو، هم بر اساس فراوانیِ واحدها و هم بر پایه‌ی بارمِ تخصیص‌یافته نشان می‌دهد.

جدول ۱: توزیع فراوانی پاسخ‌های درست آزمون کشوری ریاضی ۳ تیر ۱۴۰۵ در سطوح طبقه‌بندی

سطح سولو	فراوانی	درصد (بر اساس فراوانی)	بارم (نمره)	درصد (بر اساس نمره)
پیش ساختاری	۰	٪ ۰	۰	٪ ۰
تک ساختاری	۲	٪ ۷/۴	۰/۵	٪ ۲/۵
چند ساختاری	۱۲	٪ ۴۴/۴	۷/۵	٪ ۳۷/۵
رابطه‌ای	۱۳	٪ ۴۸/۲	۱۲	٪ ۶۰
انتزاع تعمیم یافته	۰	٪ ۰	۰	٪ ۰
جمع	۲۷	٪ ۱۰۰	۲۰	٪ ۱۰۰

یافته‌های مندرج در جدول ۱ نشان می‌دهد که بیشترین فراوانیِ پاسخ‌ها (معادل با ۴۸/۲ درصد) در سطح «رابطه‌ای» متمرکز شده است و پس از آن، سطح «چند ساختاری» با ۴۴/۴ درصد بیشترین سهم را به خود اختصاص داده است. از منظرِ توزیعِ بارم نیز، سهمِ غالب در اختیارِ سطح رابطه‌ای (۶۰ درصد) است که نشانگرِ تمایلِ طراحانِ آزمون به ارزیابیِ مهارت‌های سطحِ متوسط رو به بالا است.

در این میان، مشاهده‌ی فراوانیِ صفر در سطوح «پیش‌ساختاری» و «انتزاعِ تعمیم‌یافته» نیازمند تأملی ژرف‌نگرانه و مبتنی بر بافتِ بومیِ آزمون است. عدم وجود واحدِ تحلیلی در سطح «پیش ساختاری»، امری کاملاً منطقی و

قابل‌توجیه است؛ چرا که این پژوهش بر مبنای «پاسخ‌های درستِ منتشرشده توسط مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت» انجام شده است و از آنجا که ماهیتِ پاسخنامه‌های رسمی، ارائه‌ی الگوهای پاسخ‌گوییِ صحیح و منطقی است، طبیعتاً جایی برای بروزِ تفکرِ پیش‌ساختاری که دلالت بر عدمِ درکِ مسئله یا پاسخ‌های نامرتبط دارد، در چنین اسنادی وجود ندارد. از سوی دیگر، غیبتِ سطح «انتزاعِ تعمیم‌یافته» نیز نشانگرِ پایبندیِ دقیقِ طراحانِ سؤال به سقفِ انتظاراتِ آموزشی و وفاداریِ حداکثری به محتوای کتاب‌های درسی است. این رویکردِ محافظه‌کارانه و استاندارد، تضمین‌کننده‌ی عدالت آموزشی است تا آزمون صرفاً در دامنه‌ی محتوای مصوب و موردِ انتظار از دانش‌آموزانِ سطحِ ملی طراحی گردد. با این حال، همان‌گونه که در بخش بحث اشاره خواهد شد، گنجاندنِ محدودِ پرسش‌هایی در این سطح در آزمون‌های آینده، می‌تواند فرصتی برای شناساییِ استعدادهای برتر و تقویتِ تفکرِ خلاق در نظامِ آموزشی ایجاد نماید.

بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف تحلیل محتوایی آزمون کشوری ریاضی ۳ برگزار شده در تیر ۱۴۰۵ بر اساس طبقه‌بندی سولو انجام شد. جامعه‌ی آماری پژوهش را ۱۷ سؤال آزمون، در قالب ۲۷ واحد تحلیل (شاخه‌های الف، ب، پ) تشکیل می‌دادند. پاسخ به این پرسش که توزیع سؤالات آزمون در سطوح مختلف سولو چگونه است، مبنای تفسیر میزان توانمندی آزمون در سنجش سطوح گوناگون اندیشه‌ی ریاضی دانش‌آموزان قرار گرفت. اهمیت این مطالعه زمانی دوچندان می‌شود که توجه داشته باشیم با تغییر سیاست‌های پذیرش دانشگاه‌ها در سال‌های اخیر، ۶۰ درصد از نمره‌ی نهایی داوطلبان کنکور به نتایج آزمون‌های کشوری وابسته است؛ لذا این آزمون‌ها اکنون نقش تعیین‌کننده‌ای در سرنوشت تحصیلی دانش‌آموزان ایفا می‌کنند. در چنین شرایطی، ارزیابی این مسئله که «آیا طراحی آزمون‌های کشوری تا چه حد توانسته‌اند سطوح مختلف تفکر ریاضی (از تک ساختاری تا انتزاعی) را به شکلی متوازن و اثربخش بسنجند؟» به یک ضرورت پژوهشی تبدیل شده است.

یافته‌ها نشان داد که از میان ۲۷ واحد تحلیل، تنها ۲ واحد (۷/۴٪) در سطح تک ساختاری، ۱۲ واحد (۴۴/۴٪) در سطح چند ساختاری و ۱۳ واحد (۴۸/۲٪) در سطح رابطه‌ای قرار گرفتند و هیچ واحدی در سطوح پیش ساختاری و انتزاع تعمیم‌یافته دیده نشد. این توزیع از دو جهت معنادار است: نخست آنکه آزمون به‌طور عمده (بیش از ۹۲٪ واحدها) بر سطوح چند ساختاری و رابطه‌ای متمرکز است، و دوم آنکه هیچ سهمی از نمره به تفکر انتزاعی اختصاص ندارد. این تصویر با محاسبه‌ی بارم (نمره) نیز تأیید می‌شود: ۹۷/۵٪ از نمره‌ی کل آزمون (۱۵/۵ از ۲۰ نمره) به سطوح چند ساختاری و رابطه‌ای اختصاص یافته است که در این میان سطح رابطه‌ای با ۶۰٪ بارم، بیشترین سهم را دارد.

تمرکز آزمون بر سطح رابطه‌ای ــ که در آن عناصر چندگانه به‌صورت یک ساختار یکپارچه به هم متصل می‌شوند ــ حاکی از آن است که آزمون طراحی شده سازمان‌دهی کامل‌تر دانش ریاضی و کنار هم قرار دادن مفاهیم مرتبط را می‌سنجد و در برابر سنجش صرف حفظ دانش (سطح تک ساختاری) پایین‌ترین وزن را دارد. از سوی دیگر، خالی بودن طبقه‌ی انتزاع تعمیم‌یافته نشان می‌دهد که آزمون از دانش‌آموزان انتظار «تعمیم به موقعیت‌های جدید» و «دیدگاه فراتر از داده‌ها» را ندارد؛ یعنی سؤالات حتی در بالاترین سطح، در چارچوب متن و مسائل آشنا در سطح کتاب درسی باقی می‌مانند.

یافته‌های پژوهش حاضر با مبانی نظری بیگز و کولیس (۱۹۸۲) هم‌خوانی دارد؛ چرا که طبق این نظریه، کیفیت و ساختار پاسخ (به‌جای صرفِ کمیت آن) معیار اصلی تعیین سطح است و سطوح بالاتر مستلزم یکپارچه‌سازی روابط میان مفاهیم هستند. همچنین، نتایج این مطالعه با پژوهش‌های داخلی در زمینه تحلیل محتوای آزمون‌های ریاضی، به‌عنوان نمونه، خزاعی (۱۴۰۳) که به بررسی آزمون نهایی ریاضی دهم پرداخته بود، قابل مقایسه است. با این تفاوت کلیدی که در پژوهش خزاعی، توزیع سطوح به گونه‌ای بود که سطوح تک ساختاری (۳۰٪) و چند ساختاری (۶۵٪) غالب بودند و تنها ۵٪ از نمره‌ها در سطح رابطه‌ای قرار داشت؛ اما در آزمون مورد بررسی در پژوهش حاضر، سهم سطح

رابطه‌ای بسیار چشمگیرتر است.

این تفاوت می‌تواند ناشی از دو عامل باشد: نخست، تفاوت در سطح تحصیلی؛ آزمون دوازدهم به دلیل اهمیت حیاتی در کنکور و تداوم سالانه، از سوی طراحانی با تجربه بیشتری طراحی می‌شود که بر سنجش ارتباطات مفهومی تمرکز دارند. دوم، برخلاف آزمون‌های سطح پایین‌تر، آزمون دوازدهم به گونه‌ای طراحی شده که اگرچه به سطوح بالای شناختی (رابطه‌ای) ورود می‌کند، اما همچنان بر «سطح کتاب درسی» وفادار می‌ماند. در این راستا، مشاهده‌ی غیاب سطح «انتزاع تعمیم‌یافته» لزوماً به معنای نقص در طراحی نیست، بلکه نشان‌دهنده‌ی رعایت دقیق مرزهای محتوایی کتاب درسی و اجتناب از طرح سؤالاتی است که فراتر از سرفصل‌های تعیین‌شده هستند؛ امری که در آزمون‌های استاندارد کشوری برای حفظ عدالت و همسویی با برنامه درسی الزامی است.

در حوزه کاربردی، نتایج این تحقیق می‌تواند الگوی عملیاتی مفیدی برای طراحان آزمون و سیاست‌گذاران آموزشی فراهم آورد. از جمله این اقدامات، ضرورت ادغام هدفمند سوالاتی معدود در سطح «انتزاع تعمیم‌یافته» در طراحی آزمون‌ها است تا از این طریق، توانایی دانش‌آموزان در مواجهه با مسائل نیازمند به ابتکار ریاضی و فرآیندهای حل مسئله‌ی سطح بالاتر ارزیابی شود. همزمان، بازنگری در نظام بارم‌گذاری به‌گونه‌ای که توزیع نمرات میان سطوح مختلف، توازن عادلانه‌ای میان سطوح مختلف شناختی برقرار کند، بسیار حائز اهمیت است؛ به‌طوری که نمره‌ی سطح رابطه‌ای به عنوان یک امتیاز انحصاری عمل نکند و توزیع نمرات در سطوح پایین‌تر به‌گونه‌ای منطقی تنظیم شود که دانش‌آموزانی با اهداف تحصیلی متفاوت نیز بتوانند به حداقل نمرات لازم برای عبور از مراحل آموزشی دست یابند. در نهایت، به‌کارگیری چارچوب سولو به عنوان یک ابزار عملیاتی و ساختاریافته در فرآیند طراحی آزمون‌های استاندارد ریاضی، می‌تواند دقت و کیفیت سنجشِ میزان رشد شناختی را به‌طور چشمگیری ارتقا بخشد.

با توجه به یافته‌های حاصل از این پژوهش و محدودیت‌های موجود، ضرورت دارد در مطالعات آتی، ابعاد گسترده‌تری از تعامل میان سطوح شناختی و پیامدهای آموزشی مورد واکاوی قرار گیرد. در این راستا، نخستین گام می‌تواند بررسی همبستگی میان نمرات به‌دست‌آمده در سطوح مختلف طبقه‌بندی سولو با شاخص‌های عملکرد تحصیلی کلی دانش‌آموزان کل کشور باشد تا از این طریق، میزان پیش‌بینندگی این سطوح در موفقیت‌های آتی مشخص گردد. علاوه بر این، انجام تحلیل‌های گسترده‌تر بر روی سایر آزمون‌های کشوری در تمامی پایه‌های تحصیلی و رشته‌های مختلف، می‌تواند به ترسیم یک «سیر رشد شناختی» در مقیاس ملی کمک کند. همچنین، انجام پژوهش‌های میان‌مقیاسی با هدف مقایسه ساختار سطوح سولو در آزمون‌های ریاضی ایران با آزمون‌های استاندارد بین‌المللی، می‌تواند دیدگاه ارزشمندی درباره جایگاه و کیفیت فرآیندهای شناختی در سیستم آموزشی کشور نسبت به استانداردهای جهانی ارائه دهد و به رشد آن کمک کند.

هرچند یافته‌های این پژوهش، بینش‌های ارزشمندی پیرامونِ ساختارِ شناختی آزمون‌های ریاضی سال ۱۴۰۵ فراهم آورده است، اما لازم است نتایجِ حاصل در پرتوِ برخی محدودیت‌های روش‌شناختی تفسیر گردد. نخستین محدودیت، تمرکزِ انحصاری بر تحلیلِ «پاسخ‌های رسمیِ منتشر شده توسط مرکز ارزشیابی» است؛ اگرچه این امر اعتبارِ داده‌ها را از منظرِ تطابق با استانداردهای کلانِ آموزشی تضمین می‌کند، اما لزوماً بازتاب‌دهنده‌ی تنوعِ شیوه‌های پاسخ‌گوییِ دانش‌آموزان در محیط‌های واقعیِ کلاس درس نیست. در واقع، پاسخ‌های رسمی، مدل‌های ایده‌آلِ حل مسئله هستند و ممکن است فاصله‌ی معناداری با فرآیندهای ذهنیِ واقعیِ فراگیرندگان داشته باشند. به همین دلیل است که پیشنهاد شد در پژوهش‌های آتی، عملکرد تحصیلی کلی دانش‌آموزان کل کشور نیز بر اساس سطوح طبقه بندی سولو مورد بررسی قرار گیرد.

دیگر محدودیتِ این پژوهش، بازه‌ی زمانیِ محدود (یک‌ساله) است که امکانِ بررسیِ «سیرِ تحولِ شناختی» در طولِ سال‌های متوالی را سلب کرده است. تغییر در سیاست‌های آموزشی و یا تغییراتِ جزئی در رویکردِ طراحانِ سؤال در

دوره‌های مختلف، متغیرهایی هستند که در این مطالعه ثابت فرض شده‌اند. علاوه بر این، طبقه‌بندی سولو در این پژوهش با تکیه بر تحلیلِ محتوایِ سؤالاتِ نهایی انجام شده است که به دلیلِ ماهیتِ نیمه‌بسته‌ی این آزمون‌ها، ظرفیتِ سنجشِ سطوحِ بسیار بالای تفکرِ انتزاعی در آن‌ها به‌طور طبیعی محدود است. بنابراین، تعمیمِ نتایجِ این پژوهش به سایرِ پایه‌های تحصیلی یا نظام‌های آموزشیِ غیرمتمرکز، باید با احتیاط صورت پذیرد. این محدودیت‌ها، نه به معنای کاستی، بلکه به عنوان «فرصت‌های پژوهشی» تلقی می‌شوند تا در مطالعاتِ آتی، با بهره‌گیری از پاسخ‌نامه‌های واقعیِ دانش‌آموزان و در بازه‌های زمانیِ طولی، با بررسی سایر آزمون‌های کشوری ریاضی ۳ در سال‌های مختلف، دقت و عمقِ تحلیل‌های شناختی در نظام آموزش ریاضی کشور ارتقا یابد.

References

Alamian, V. & Khalili, R. (2024). The effect of using multiple representations on mathematics teacher's teaching based on SOLO theory in the topic of equation and line equation. *Journal of Theory and Practice in Teacher Education*, 10(18), 33–50. [In Persian]

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press.

Fernandez, P. J. M. & Guzon, A. F. H. (2025). A SOLO Taxonomy-based rubric for assessing conceptual understanding in applied calculus. *Journal on Mathematics Education*, 16(2), 559–580.

Haghjoo, S. Reyhani, E. (2019). A study on performance of secondary school students in solving a spatial ability task based on SOLO theory. *Technology of Educational journal*, 13(3), 484–498. [In Persian]

Khazaie, Z. (2025). Examining the 10th math final exam based on the classification levels of the SOLO theory. *Journal of Research in Mathematics Education*, 4(2), 32-41. [In Persian]

Komeijani, A. Reyhani, E. Rahimi, Z. & Bahrami Samani, E. (2025). Evaluation of statistical literacy of eleventh-grade mathematics students based on the SOLO taxonomy. *Journal of Educational Innovations*. Advance online publication.
https://doi.org/10.22034/jei.2025.506256.3151 [In Persian]

Maimunah, M. Kartini, K. & Arif, N. (2023). Analysis of SOLO taxonomy-based test instruments in approaching the Merdeka curriculum. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, *8*(4), 272–283.

Mohabbatpanah, A. & Yaftian, N. (2026). Identifying the level of geometric thinking of eighth grade students: A study applying the SOLO taxonomy. *Journal of Educational Innovations*. Advance online publication. https://doi.org/10.22034/jei.2026.551934.3344 [In Persian]

Mohabbatpanah, A. & Yaftian, N. (2023). Introducing SOLO Theory Focusing on its Application in Geometry. *Journal of Research in Mathematics Education*, 3(1), 51–70. [In Persian]

Mohabbatpanah, A. & Yaftian, N. (2021). Sixth grade math textbook evaluation based on SOLO taxonomy levels. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 15–29. [In Persian]

Yaftian, N. & Mohabbatpanah, A. (2024). The trace of the SOLO theory taxonomy levels in the 8th-grade mathematics textbook. *Journal of Educational and Scholastic Studies*, 13(1), 113–128. [In Persian]