Farhangian University
Quarterly Journal of Education in Basic Sciences
Volume ۵, Issue ۱۴, Spring ۲۰۱۹

دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه
دوره پنجم، شماره چهاردهم، بهار ۱۳۹۸

بررسی میزان درک و فهم دانش آموزان سال چهارم متوسطه از مفهوم انتگرال در چارچوب نظریه ی APOS

وحید عالمیان[۱]، مهدی قایدی[۲]، ملوک حبیبی[۳]

دریافت: ۹۸/۲/۱ پذیرش: ۹۸/۴/۱

چکیده

این مطالعه به بررســی درک دانش آموزان از مفهوم انتگرال در چارچوب نظریه ی APOS می پردازد. چالشــی که پیش روی اکثر مدرسان و دبیران ریاضی وجود دارد، این است که چه روش و رویکرد آموزشی در پیش گرفته شود تا منجر به درک مفهومی دانش آموزان از مفاهیم ریاضی گردد. یکی از نظریه هایی که برای بررسی یادگیری مفاهیم ریاضی در سطح دانشگاهی مورد استفاده قرار میگیرد، نظریه ی APOS است. تحقیق حاضر که یک تحقیق کیفی است، به روش زمینه یابی انجام شده است. این مقاله تحلیل پاسخ دانش آموزان به هفت نوع سؤال در مورد انتگرال توابع را گزارش می دهد. نتایج حاصل از تحقیق نشان داد که اکثر دانش آموزان در درک مفهومی انتگرال ناتوانند و مسائل انتگرال را در صورتی درست حل می کنند که به یک روش روتین برای حل دسترسی داشته باشند. بر مبنای نظریه ی APOS اکثر دانش آموزان در سطح عمل و فرآیند از مفهوم انتگرال قرار دارند و تعداد کمی به سطوح بالاتر رسیده و توانسته اند طرحواره انتگرال را در ذهن خود تشکیل دهند.

کلید واژه ها : مفهوم انتگرال، نظریه ی یادگیری، نظریه ی APOS.

[۱]. استادیار گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، ایران، نویسنده مسئول، vahid_alamian@yahoo.com
[۲]. کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، ایران.
[۳]. عضو هیات علمی دانشگاه فرهنگیان، ایران.

مقدمه

درک مفهومی دانش آموزان از مفاهیم ریاضی مدتهاست که به دغدغه اصلی مدرسان و دبیران ریاضی تبدیل شده است. لذا رویکرد و روش آموزشی که منجر به درک مفهومی دانش آموزان از مفاهیم ریاضی گردد، یک نیاز اساسی برای آموزشگران ریاضی است.

در موارد زیادی مشاهده شده است که شیوه‌های رایج آموزش ریاضیات اگرچه تا حدی دانش آموزان را در حل شکل های مر سوم م سائل ریا ضیاتی در ارز شیابی‌ها توانمند می کند، اما کمک چندانی به شکل‌گیری درک مفهومی از مفاهیم ریا ضیاتی در آنها نمی کند. به همین دلیل فراگیران در رویارویی با م سائل چالش برانگیز ریا ضی که م ستلزم درک عمیق و مفهومی آموخته‌ها ست موفقیت چ شمگیری به د ست نمی‌آورند. نتایج تحقیقات ن شان می دهد که اکثر مفاهیم ریا ضی به دانش آموزان به روش های قالبی و روتین آموزش داده می شود و چون ارز شیابی تح صیلی آنها نیز بر ا ساس همین روش ها صورت می گیرد، برای دانش آموزان و معلمان راضی کننده به نظر می رسد. رویه های الگوریتمی به دانش آموزان کمک می کند تا تکالیف معمولی را به سادگی انجام دهند و لذا ذهن آنها برای برخورد با مسایل مفهومی اصلاً آماده نخواهد شد. لیکن حتی ماهرانه ترین استفاده از یک رویه، کمکی به توسعه دانش مفهومی مرتبط با آن رویه نمی کند (هیبرت[۱]،۱۹۹۱، نقل شده در چمن آرا،۱۳۸۴).

نظریه APOS[۲] از جمله نظریات ساخت گرایانه ای است که به موضوع درک فراگیران از مفاهیم می پردازد. بر اساس این نظریه فرد باید از یک ساختار ذهنی منا سب مرتبط با عمل، فرایند، شیء و طرحواره بهرمند با شد تا بتواند به درکی از یک مفهوم ریاضـــیاتی خاص دســـت یابد. و اگر چنین ســـاختار ذهنی ای وجود نداشـــته باشـــد، یادگیری مفهوم نیز تقریباً غیرممکن می نماید. این نظریه به پژوه شگران کمک می کند نحوه ساخت یک مفهوم در ذهن دانش آموزان را درک کند و عوامل کمک کننده به بهبود این فرایند و همچنین موانع آن را شناسایی کند.

مفهومی که در این تحقیق به آن پرداخته می شـــود مفهوم انتگرال اســـت. مفهوم انتگرال یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریا ضیات و همچنین فیزیک ا ست. تحقیقات اخیر ن شان می دهد که در بین مفاهیم متعدد ح سابان، برر سی چگونگی درک دانش آموزان از مفاهیم مشتق و انتگرال نیاز به توجه ویژه ای دارند. بطور خاص درک دانش آموزان از مفهوم انتگرال موضوعی بسیار مهم است چرا که انتگرال مفهومی کاربردی برای مطالعه علوم مختلف در دنیای واقعی مانند فیزیک و مهند سی ا ست (سروای و همکاران[۳]،۲۰۰۸) همچنین دانش آموزانی که به سطوح بالاتر تح صیلی می روند با مفهوم انتگرال بیش از مفهوم مشتق مواجه می شوند(استوارت[۴] ، ۲۰۰۷؛ توماس و همکاران[۵] ، ۲۰۰۹).

در این تحقیق میزان درک دانش آموزان سال چهارم متو سطه از مفهوم انتگرال مورد ارزیابی قرار گرفته ا ست و سطوح درک در چارچوب نظریه یادگیری APOS برر سی شده است. این نظریه که یکی از نظریات یادگیری ریا ضی در حوزه ی آموزش ا ست، مدلی ا ست که بر چارچوب مو ضعی ر شد مفهومی فرد متمرکز ا ست بطوریکه مرتبط با جنبه ی مفهومی خاص ا ست و در آن یادگیرنده تلاش می کند اطلاعات در د سترس را بفهمد و با ا ستفاده از تمام ساختارهای شناختی در دسترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید(عبدی و همکاران، ۱۳۸۶).

مطالعات نشان داده است که آموزش مفهوم انتگرال به دلیل پیچیدگی آن ساده نمی باشد و دانش آموزان در درک آن دچار مشـکلات فراوانی می باشـند. چرا که انتگرال مفهومی کاربردی برای مطالعه علوم مختلف در دنیای واقعی مانند فیزیک و مهندسی است (سروای و همکاران،۲۰۰۸) .

همچنین دانش آموزانی که به سـطوح بالاتر تحصـیلی می روند با مفهوم انتگرال بیش از مفهوم مشـتق مواجه می شوند(استوارت[۶] ، ۲۰۰۷؛ توماس و همکاران[۷] ، ۲۰۰۹).

---

۱ - Hibert

۲ Action,Process,Object,Schema.

۳ Serway and at.al

۴ Stewart

۵ Thomas

۶ Stewart

۷ Thomas

در این تحقیق میزان درک دانش آموزان سال چهارم متو سطه از مفهوم انتگرال مورد ارزیابی قرار گرفته ا ست و سطوح درک در چارچوب نظریه یادگیری APOS برر سی شده است. این نظریه که یکی از نظریات یادگیری ریاضی در حوزه ی آموزش ا ست، مدلی ا ست که بر چارچوب مو ضعی ر شد مفهومی فرد متمرکز ا ست بطوریکه مرتبط با جنبه ی مفهومی خاص ا ست و در آن یادگیرنده تلاش می کند اطلاعات در د سترس را بفهمد و با ا ستفاده از تمام ساختارهای شناختی در دسترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید(عبدی و همکاران،۱۳۸۶).

مطالعات نشان داده است که آموزش مفهوم انتگرال به دلیل پیچیدگی آن ساده نمی باشد و دانش آموزان در درک آن دچار مشکلات فراوانی می باشند. چرا که انتگرال مفهومی کاربردی برای مطالعه علوم مختلف در دنیای واقعی مانند فیزیک و مهندسی است (سروای و همکاران،۲۰۰۸).

یکی ازمشکلات خاص دانش آموزان در دوره دبیرستان درس انتگرال است. انتگرال و انتگرال گیری به علت اهمیتی که در مطالعه دروس دیگر مانند فیزیک دارد، نیاز به مطالعه و بررسی ویژه ای دارد توجه به شکل گیری این مفهوم در ذهن و ساختارهای ذهنی دانش آموزان از آن، تا حدی می تواند مشکلات ایجاد شده در زمینه درک این مفهوم را شناسایی کند.

تصورات غلط و بدفهمی نسبت به مفهوم انتگرال مانع درک دانش آموزان از مفهوم انتگرال می با شد، بنابراین ارائه ابزارهای آموزشی مفید و راهبردهای نوین تدریس در مبحث انتگرال ها بایستی یک اولویت برای آموزش ریاضی باشد.

درک این که یادگیرنده ها چگونه ریاضی را یاد می گیرند، می تواند به معلمان ریاضی در انتخاب شیوه های تدریس کمک کند. در واقع این درک درست و واقع گرایانه، معلمان را قادر می سازد تا با داشتن تصویری شفاف از چگونگی بروز رفتار ریاضی افراد، تصمیم مناسب علمی در انتخاب عنوان های درسی، تقدم و تأخر مطالب و اتخاذ شیوه های آموزشی را داشته باشند و در رفع موانع یادگیری یادگیرنده ها بکوشند (علم الهدایی، ۱۳۸۳ ،ص۱۴).

برای برر سی مشکلات آموزش ریاضی دانشجویان و دانش آموزان نظریه ها و رویکردهای مختلفی وجود دارد. طبق هر نظریه یادگیری در ریاضیات، اگر یادگیرنده دارای یک ساختار ذهنی مناسب برای یک مفهوم ریاضی باشد، یادگیری آن مفهوم آ سان تر خواهد بود، در غیر این صورت یادگیری مفاهیم برای او تقریباً غیر ممکن ا ست(دوبینسکی[۱] و همکاران، ۱۹۹۱). بنابر دیدگاهی که در این تحقیق از آن استفاده شده است درک و فهم یادگیرنده از مفهومی مشخص، می تواند در یکی از سطوح عمل[۲]، فرآیند[۳]، شیء[۴] باشد و حتی ممکن است یادگیرنده بتواند طرحواره[۵] مفهوم را هم تشکیل دهد. این امر ایجاب می کند که اهداف در نظر گرفته شده برای آموزش، باید شامل راهبردهایی برای کمک به دانش آموزان در جهت ایجاد ساختارهای ذهنی مناسب باشد و آنها را به سمت اِعمال این ساختارها برای درک مفاهیم ریاضی هدایت کند. در سال های اخیر محققان آموزش ریا ضی تحقیقات زیادی درباره یادگیری مفاهیم ریا ضی انجام داده اند. این تحقیق با ارائه راهبردهای مناسب آموزشی جهت توسعه ساختارهای ذهنی دانش آموزان در مفهوم انتگرال، در ادامه آنها می باشد.

نظریه ی APOS

این نظریه یکی از نظریات یادگیری ا ست که بر چارچوب مو ضعی ر شد مفهومی فرد متمرکز ا ست و به یک جنبه مفهومی خاص مرتبط است که در آن یادگیرنده تلاش می کند اطلاعات در دسترس را بفهمد و با استفاده از تمام ساختارهای شناختی در د سترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید .نظریه APOS یک نظریه ساخت و سازگرایی است که بر ا ساس نظریه یادگیری پیاژه بنا شده است. ساختارهای ذهنی که برای ساخت و ساز مفهوم ا ستفاده می شود عبارتند از عمل، فرآیند، شيء و طرحواره .به عبارت دیگر در این چارچوب فرض می شود که یادگیرنده در زمان یادگیری، مفاهیم را در قالب عمل، فرآیند یا شيء می فهمد و این قالب ها را با یکدیگر هماهنگ می کند تا طرحواره ساخته شود.

نظریه یادگیری عمل - فرآیند -شيء -طرحواره دوبینسکی که به نظریه یادگیری APOS معروف است در تحقیقات آموزش ریا ضی بسیار کاربرد دارد. با این چارچوب می توان در برنامه ای دراز مدت، واحدتی بین نظریه و عمل آموز شی

---

۱ Dubinsky
۲ Action
۳ Process
٤ Object
٥ Schema

ایجاد کرد، زیرا نتایج تحقیقاتی که بر ا ساس این چارچوب طراحی شده اند، بر طراحی آموز شی اثر می گذارند و بالعکس، داده هایی که طی آموزش حاصل می شود را می توان با این چارچوب تحلیل کرد(دوبینسکی [۱] و مکدونالد[۲]،۲۰۰۱).

تعریف عمل

عمل، تغییر دادن اشیاء از پیش شناخته شده توسط فرد است، در صورتی که راه این تغییر به یادگیرنده نشان داده شده باشد. در این مرحله او نیاز صریح به حافظه اش دارد تا بتواند برای انجام تکالیف و مسایل به صورت گام به گام از آن استفاده کند. گرچه درک عملی بسیار محدود است ولی قسمتی مهم برای درک مفاهیم در سطوح بعد به شمار می رود؛ به طوریکه رویکردهای آموزشی مبتنی بر این نظریه یادگیری با فعالیت هایی شروع می شود که ساخت عمل مفهوم را حمایت می کند.

تعریف فرآیند

زمانی که عملی تکرار می شود و شخص روی آن بازتاب می کند می تواند یک ساختار ذهنی درونی بسازد که فرایند نام دارد .در این مرحله شخص می تواند همان کار را بدون نیاز به محرک خارجی در مرحله عمل انجام دهد. همچنین فرد می تواند در مورد انجام فرآیند فکر کند بدون آنکه در حقیقت آن را انجام دهد و حتی می تواند دربارۀ معکوس کردن و ترکیب کردن آن با دیگر فرآیندها تفکر کند(ایسالا [۳]و همکاران،۱۹۹۷) .

تعریف شیء

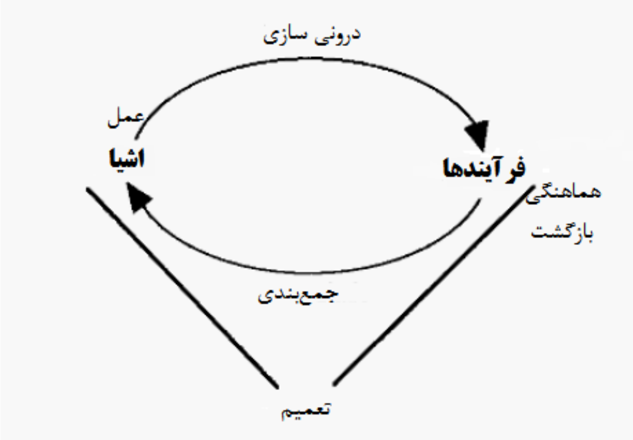
یک شیء از فرآیند ساخته می شود، زمانی که شخص از فرایند همانند یک کلیت آگاه می شود و پی می برد که می تواند عمل ها را تغییر دهد و حقیقتاً قادر به ساختن چنین تغییراتی با شد، تفکر او از سطح فرآیند به سطح شیء ر سیده است یا اصطلاحاً فرآیند در شیء **خلاصه** [۴]شده است. در طول انجام عمل یا فرآیند بر یک شیء اغلب لازم است که شیء را به فرایندهایی که به منظور استفاده کردن از ویژگی ها و دست ورزی با آن به دست آمده است، **گسترده**[۵] کرد(دوبینسکی و مک دونالد، ۲۰۰۱)گرچه تشکیل شیء یا شیء انگاری وجه اشتراک تمام نظریه ها در یادگیری ریاضیات می باشد و در واقع اساس تمام آنها این است که در ابتدا مفهوم ایجاد می شود سپس از طریق شیء انگاری فرآیندها، اشیاء ریاضی ساخته می شوند، ولی اغلب تصور می شود که خلاصه کردن فرآیند به شیء مشکل است و راهبردهای آموزشی لازم برای کمک به دانش آموزان جهت برخورد با چنین موقعیت هایی وجود ندارد که مهم ترین دلیل آن فقدان تجربه های لازم برای متناظر کردن عمل ها به آنچه به عنوان فرایند تعبیر می شوند، می باشد(نظری،۱۳۹۰).

تعریف طرحواره

اعمال و فرایندها و اشیا پس از اینکه ساخته می شوند می توانند به روش های گوناگون در هم تنیده شوند. مثلاً دو یا چند فرآیند ممکن است توسط اتصال به یکدیگر از طریق ترکیب یا شیوه های دیگر به هم مربوط شوند. مجموعه ای از فرآیندها و اشیاء در نوع ساخت و ساز یافته ای به صورت یک طرحواره سازماندهی می شوند. طرحواره ها می توانند به عنوان اشیاء پایه در سطوح بالاتر طرحواره در ساختار ریاضی نقش داشته باشند(دوبینسکی و مک دونالد،۲۰۰۱).

---

[۱] Dubinesky
[۲] .Mc Donald
[۳] Asiala
[۴] Encapsulate
[۵] De-encapsulated



شکل ۲. ۱ طرحواره ها و ساختارشان (دوبینسکی، ۱۹۹۱، ص ۱۰۷)

مفهوم انتگرال

در دهه های اخیر، تحقیقات در مورد چگونگی درک دانش آموزان متوسطه از مفاهیم ریاضی و بهبود روش های آموزش با هدف درک عمیق تر بطور چشمگیری افزایش یافته است. به عنوان مثال چگونگی یادگیری و درک انواع مفاهیم حسابان، بخصوص مفاهیم مربوط به حد (بیزودنات[۱] ، ۲۰۰۱؛ دیویس و وینر[۲] ، ۱۹۸۶؛ اورتمن و همکاران[۳] ، ۲۰۰۸؛ اورتمن ،۲۰۰۴) مشتق (مارونگل[۴]، ۲۰۰۴؛ اورتون[۵] ، ۱۹۸۳) و انتگرال و مجموع های ریمان (بیزودنات و اولیور، ۲۰۰۰؛ هال[۶]، ۲۰۱۰؛ اورتون ۱۹۸۳؛ سیلی[۷]و اورتمن ۲۰۰۵؛ تامپسون و سیلورمن[۸]،۲۰۰۸) مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. تحقیقات اخیر نشان می دهد که در بین مفاهیم متعدد حسابان، بررسی چگونگی درک دانش آموزان از مفاهیم مشتق و انتگرال نیاز به توجه ویژه ای دارند. بطور خاص درک دانش آموزان از مفهوم انتگرال موضوعی بسیار مهم است چرا که انتگرال مفهومی کاربردی برای مطالعه علوم مختلف در دنیای واقعی مانند فیزیک و مهندسی است (سروای و همکاران[۹] ،۲۰۰۸) همچنین دانش آموزانی که به سطوح بالاتر تحصیلی می روند با مفهوم انتگرال بیش از مفهوم مشتق مواجه می شوند(استوارت[۱۰] ، ۲۰۰۷؛ توماس و همکاران[۱۱] ، ۲۰۰۹) برخی از تحقیقات اخیر نشان داده است که تفسیر های خاصی از انتگرال مانند" سطح زیر منحنی "موجب محدود کردن و پیچیده شدن کاربرد های انتگرال معین می گردد(سیلی[۱۲] ، ۲۰۰۶) هال(۲۰۱۰) نشان داد که دانش آموزان از راه های مختلفی به تفسیر انتگرال معین و نامعین می پردازند، از جمله این راه ها می توان به "مساحت"،"مجموع های ریمان" ، " براورد مقادیر " اشاره کرد. به نظر می رسد مفهوم انتگرال به عنوان مساحت زیر منحنی و یا صرفا یک محاسبه، در میان دانش آموزان رواج بیشتری دارد.در حساب دیفرانسیل و انتگرال ، از انتگرال یک تابع برای عمومیت دادن به محاسبه مساحت ، حجم ، جرم یک تابع استفاده می شود. فرایند پیدا کردن جواب انتگرال را انتگرال گیری گویند. البته تعاریف متعددی برای انتگرال گیری وجود دارد ولی درهر حال جواب مشابه ای از این تعاریف به دست می‌آید.

---

[۱] Bezuidenhout
[۲] Davis and Vinner
[۳] Oehrtman and at.al
[۴] Marrongelle
[۵] Orton
[۶] Hall
[۷] Sealey
[۸] Thompson and Silverman
[۹] Serway and at.al
[۱۰] Stewart
[۱۱] Thomas
[۱۲] Sealey

تعریف های انتگرال : از مهم ترین تعاریف در انتگرال می توان از انتگرال ریمان و انتگرال لبسکی[1] نام برد. انتگرال ریمان بوسیله برنهارد ریمان در سال ۱۸۵۴ ارائه شد که تعریف دقیقی را از انتگرال ارائه می داد تعریف دیگر را هنری لبسکی ارائه داد که طبق این تعریف شرایط تعویض پذیری حد و انتگرال با شرط مساوی ماندن عبارت،ارائه می کرد.

در کتاب در سی ریا ضی عمومی سال چهارم تجربی(چاپ ۱۳۹۴، ص۱۵۱) این تعریف از انتگرال آمده ا ست : فرض کنیم تابع f در بازه ی بسته [a,b] پیوسته و برای هر $f(x) \geq 0 , x \in [a, b]$. در این صورت منظور از نماد $\int_a^b f(x)dx$ مساحت ناحیه زیر نمودار $y = f(x)$ است که بالای محور x و بین خطوط x=a و x=b قرار دارد. مقادیر a وb را حدود انتگرال گیری می نامیم. dx نمایش این ا ست که متغیر انتگرال گیری x ا ست. انتگرال توابع نامنفی(یعنی توابعی که فقط مقادیر مثبت یا صفر اختیار می کنند) همیشه عددی مثبت (یا صفر) ا ست و برابر مساحت ناحیه زیر نمودار و محدود به محور xها و حدود انتگرال گیری است.

در کتاب در سی ریا ضی عمومی سال چهارم تجربی(چاپ ۱۳۹۴، ص۱۵۲) این تعریف از انتگرال آمده ا ست، فرض کنیم تابع f در بازه ی بسته [a,b] پیوسته و برای هر $f(x) \leq 0 , x \in [a, b]$. در این صورت منظور از نماد $\int_a^b f(x)dx$قرینه ی مساحت ناحیه بالای نمودار $y = f(x)$ ا ست که با محور x و بین خطوط x=a و x=b محدود شده با شد. انتگرال توابعی که فقط مقادیر منفی (یا صفر)اختیار می کنند، یعنی توابعی که نمودار آن ها زیر محورx قرار دارد برابر قرینه مساحت ناحیه بالای نمودار و محدود به محور x و حدود انتگرال گیری ا ست. پس انتگرال اینگونه توابع همیشه عددی منفی یا صفر است.

اولین بار لایب نیتس نماد استانداری برای انتگرال معرفی کرد و به عنوان مثال انتگرال f بین a و b را به صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می دهند علامت $\int$ ،انتگرال گیری از تابع f را نشان می دهند ،aو b نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند و f تابعی انتگرال‌پذیر است و dx نمادی برای متغیر انتگرال گیری است. از لحاظ تاریخی dx یک کمیت بی‌نهایت کوچک را نشان می دهد. هر چند در تئوری‌های جدید،انتگرال گیری بر پایه متفاوتی پایه‌گذاری شده است.

اگر تابعی دارای انتگرال با شد به آن انتگرال‌پذیر گویند و تابعی که از انتگرال گیری از یک تابع حا صل می شود تابع اولیه گویند. اگر انتگرال گیری از تابع در یک محدوده خاص با شند به آن انتگرال معین گویند که نتیجه آن یک عدد ا ست ولی اگر محدوده آن مشخص نباشد به آن انتگرال نامعین گویند.

چارچوب نظری تحقیق

در خلال سال های اخیر نظریه های گوناگونی برای توضیح و پیش بینی توسعهٔ شناختی در آموزش ریاضی ابداع شده اند. تمام این مدل ها و نظریه ها در مورد نحوهٔ شکل گیری و درک یک مفهوم در ذهن یادگیرندگان می باشد که بر توانایی و انعطاف پذیری یادگیرنده در تبدیل انواع بازنمایی های مختلف یک مفهوم اشاره دارند. تمرکز این تحقیق بر نظریه APOSا ست که چارچوبی ا ست که از روش های کیفی برای تحقیق بهره می برد و بر دیدگاه های نظری ر شد شناختی پیاژه [2]در رابطه با انتزاع بازتابی [3] و بازسازی آنها در حیطه ریاضیات بنا شده است.

پیاژه انواع انتزاع بازتابی(تجرید) را به سه دسته تقسیم می کند:

انتزاع تجربی[4] ، **انتزاع شبه تجربی**[5] و **انتزاع بازتابی**.

در **انتزاع تجربی،** دانش مستقیماً از ویژگی اشیاء حاصل می شود، و در نتیجه آن، استخراج خواص مشترک اشیاء و تعمیم ممکن می شود، مثل رنگ اشیاء.

در **انتزاع شبه تجربی،** ویژگی هایی که عمل های فرد، در اشیاء ایجاد می کنند، استخراج می شوند، اما همچنان اشیاء ملموس اند .مثلا فرد می تواند با مرتب کردن دو دسته از اشیاء، بین آنها تناظری یک به یک ببیند. این مرتب کردن، عملی است که فرد بر روی اشیاء اجرا می کند.

---

[1] lebesgue
[2] Jean Piaget
[3] reflective abstraction
[4] empirical abstraction
[5] pseudo- empirical abstraction

انتزاع بازتابی کاملاً درون فرد رخ می دهد و نتیجه هماهنگ شدن عمل های مختلف ا ست. مثلاً کودکی که عمل دو دو تا کردن، عمل سه سه تا کردن و. ..را اجرا می کند با درونی کردن و هماهنگ کردن این عمل ها می تواند به ترتیب کلی دست یابد(دوبینسکی،۱۹۹۱) .

پیاژه معتقد بود که همان قدر که انتزاع بازتابی در تفکر منطقی کودکان مهم ا ست، در ریا ضیات معمولی هم نقش دارد. مبنای چارچوب نظری این تحقیق، انتزاع بازتابی ا ست. در ریا ضیات می توان انتزاع بازتابی را ساخت ا شیاء ذهنی و اجرای عملیات ذهنی بر روی این اشیاء دانست.

تئوری APOS و کاربردهایش برای یادگیری ریاضیات بر دو فرض زیر استوار است:

فرضیه هایی برای دانش ریاضی : دانش ریاضی یک فرد، تمایل وی جهت پاسخگویی به مسائل ریاضی با بازتاب بر مسئله و ساختن یا بازسازی عمل ها و فرآیندها و شیءها و سازماندهی آنها در قالب طرحواره های ریاضی برای برخورد با یک موقعیت حل مسئله می باشد.

فر ضیه ای برای یادگیری : فرد مفاهیم ریا ضی را به طور م ستقیم نمی آموزد، بلکه او برای معنا بخ شیدن به یک مفهوم ریا ضی از ساختارهای ریا ضی ا ستفاده می کند. اگر فرد برای یک مفهوم ساختارهای ذهنی منا سب ریا ضی دا شته با شد یادگیری برای او آ سان ا ست ولی اگر ساختارهای ذهنی منا سبی موجود نبا شد یادگیری مفهوم تقریباً غیر ممکن است(دوبینسکی ومک دونالد،۲۰۰۱).

مطالب بالا بر این نکته دلالت می کند که هدف آموزش باید شامل راهبردهایی به منظور کمک به دانش آموزان برای ساختن ساختارهای ذهنی منا سب با شد و همچنین منجر به هدایت آنها برای یادگیری این ساختارها جهت شکل گیری درک آنها از مفاهیم ریاضی شود.به بیان دقیقتر این دیدگاه با توصیف و تشریح پدیده ها و اتفاقاتی که در دانش آموزی که سعی می کند درکش از مفهوم ریاضی را بسازد، می تواند به درک او از روند یادگیری کمک کند و مسیرهایی برای آموزش که در بهبود یادگیری مؤثر است را پیشنهاد می دهد.

این چارچوب سه مؤلفه دارد که به صورت یک چرخه به هم متصل هستند. این مؤلفه ها عبارتند از : **تحلیل نظری**، **اجرای آموزشی** و **تحلیل داده ها**.

چارچوب با تحلیل نظری از آنچه که برای یک مفهوم معنی می شود آغاز می گردد و سپس چگونگی ساخته شدن این درک توسط یادگیرنده توصیف می شود که منجر به طراحی رفتار آموزشی می گردد و مستقیماً بر تلاش دانش آموزان به ساختن ساختارهای معین که توسط تحلیل نظری بیان شده بود متمرکز می گردد و سپس اجرای آموزشی به جمع آوری داده ها هدایت می گردد. ارتباطات در این چرخه در نمودار (۲. ۱) ارائه شده است.

نمودار (۲. ۱) چرخه اجزای نظریه **APOS** (ایشالا و همکاران، ۱۹۹۷)

در ابتدا جزئیات هر سه مؤلفه را که شامل ساختارهای ذهنی معین برای یادگیری ریاضی به صورت عمل و فرآیند و شیء و طرحواره و ارتباط میان آنها در قسمت تحلیل نظری و سپس در اجرای آموزشی، چرخه یادگیری ACE[۱] و سرانجام روش های استفاده شده در تحلیل وجمع آوری داده ها بیان می شود.

پیشینه تحقیق

حسامی (۱۳۹۵) تحقیقی با عنوان "بررسی درک دانش آموزان سال سوم تجربی از مفهوم تابع در چارچوب نظریه APOS"به روش زمینه یابی انجام داده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که اکثر دانش آموزان در درک مفاهیم

[۱] Activities, Classroom discussion, Exercises

مختلف تابع ازجمله تعریف تابع، بازنمایی های مختلف تابع، معکوس تابع و ...دچار مشکل هستند و مسائل تابع را در صورتی درست حل می کنند که به یک روش روتین برای حل، دسترسی داشته باشند.

خیر الله زاده (۱۳۹۵) تحقیقی با عنوان " بررسی و تعیین سطح یادگیری دانش آموزان پسرسال سوم ریاضی دبیرستان از مبحث مشتق توابع مثلثاتی به کمک نظریه *APOS* " به روش زمینه یابی انجام داده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که درک دانش آموزان از مشتق توابع مثلثاتی تا حد قابل قبولی در سطح شیء می باشد و درصد کمی از دانش آموزان به سطح طرحواره رسیده اند.

شریفی (۱۳۹۴) تحقیقی با عنوان " بررسی درک دانش آموزان سال سوم متوسطه دختر از مفهوم حد در چارچوب نظریه *APOS* " به روش زمینه یابی انجام داده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که اکثر دانش آموزان در درک مفهومی حد ناتوانند و مسائل حد را در صورتی درست حل می کنند که به یک روش روتین برای حل دسترسی داشته باشند.

گمنام (۱۳۹۶) تحقیقی با عنوان " بررسی و مقایسه درک دانش آموزان سال سوم ریاضی و تجربی دبیرستان های شهرستان های فردوس و مه ولات از مفهوم حد چارچوب نظریه ی *APOS*" به روش زمینه یابی انجام داد و در این تحقیق از سوالات خانم شریفی برای انجام تحقیق استفاده نموده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد که اکثر دانش آموزان در درک مفهومی حد ناتوانند و مسائل حد را در صورتی درست حل می کنند که به یک روش روتین برای حل دسترسی داشته باشند.

ماهاراج (۲۰۱۰) در تحقیقی روی مفهوم حد تابع بر روی دانشجویان آفریقای جنوبی نشان داد که حد، مفهومی است که دانش آموزان در فهم و بیان آن دچار مشکل می شوند و این مشکل احتمالاً به خاطر این است که آنان ساختار مناسبی در سطح عمل، فرآیند و شیء و طرحواره ندارند. یافته های این مطالعه نشان داد که دانش آموزان حد را به سختی درک می کنند و تاکید کرد که این نتیجه احتمالاً پیامد این موضوع است که بسیاری از دانش آموزان ساختار ذهنی مناسبی در سطح فرآیند و شیء و طرحواره از حد تابع ندارند. برنامه های طراحی شده برای آموزش نشان داد که برای کمک به رشد ساختارهای ذهنی دانش آموزان در سطح فرآیند و شیء و طرحواره به زمان زیادی نیاز است.

ماهاراج (۲۰۱۳) درتحقیقی با مفهوم مشتق روی دانشجویان در آفریقای جنوبی انجام دا. یافته های اکثر مطالعات قبلی روی مشتق نشان داده بود که این مفهوم برای دانش آموزان بسیار مشکل است و این مشکلات روز به روز درحال افزایش است. این تحقیق به صورت چرخه آموزشی ACE به مدت سه هفته اجرا گردید.

ماهاراج (۲۰۱۴) تحقیقی روی مفهوم انتگرال و کاربردهای آن انجام داد. قواعد به دست آوردن ضدمشتق ها، روابط بین مشتق ها و ضدمشتق ها، تفسیر انتگرال معین به عنوان سطح زیر یک منحنی و کاربردهای واقعی آنها به دانشجویان مقطع کارشناسی رشته علوم آموزش داده شد. بر اساس یافته های این مطالعه دانشجویان در استفاده از قواعد انتگرال ها و همچنین به کارگیری آنها دچار مشکلند و این احتمالا به دلیل فقدان ساختارهای ذهنی مناسب در سطوح فرایند، شیء و طرحواره است.

روش تحقیق

روش این تحقیق زمینه یابی(پیمایشی) ا ست که یکی از روش های جمع آوری داده ها ست که در آن از یک گروه خاص از افراد، در مورد یک موضوع خاص، تحقیق صورت می گیرد. گروه خاص در این تحقیق، دانش آموزان سال چهارم متو سطه و مو ضوع خاص، درک آنها از مفهوم انتگرال می با شد. نوع این تحقیق زمینه یابی مقطعی ا ست که اطلاعات آن در زمانی جمع آوری شده که مبحث انتگرال در حساب دیفرانسیل و انتگرال چهارم ریا ضی و ریا ضیات چهارم تجربی تدریس شده است.

جامعه آماری در این مطالعه، کلیه دانش آموزان دختر و پسر سال چهارم متوسطه رشته ریاضی و تجربی شهرستان انار است که تعداد آنها ۱۴۶ نفر می باشد. در این شهر دو دبیرستان نمونه دولتی و بقیه دولتی هستند. به جهت اینکه هدف این تحقیق میزان درک کلیه دانش آموزان سال چهارم متوسطه بود، لذا در نمونه این تحقیق تمام دانش آموزان چهارم دبیرستان نمونه دولتی شرکت دارند و دو دبیرستان دولتی دیگر به صورت تصادفی انتخاب شده اند. تعداد کل اعضای نمونه ۱۰۵نفر هستند.

تحلیل داده ها بر مبنای چارچوب APOS

در تحقیقات وقتی داده ها تحلیل شوند، لازم است داده ها از بعضی جنبه ها مقایسه و دسته بندی شوند. بر اساس این دسته بندی از آنها نتایجی استخراج می شوند. این دسته بندی و مقایسه با داشتن چارچوبی نظری ممکن است که درتحلیل داده ها در این تحقیق از چارچوب نظری APOS بهره برده ایم.

با این چارچوب می توان سطح درک دانش آموزان از مفاهیم مختلف را دسته بندی کرد. در این دسته بندی چهار سطح وجود دارد که به ترتیب عبارتند از **عمل، فرایند، شیء و طرحواره** که به طور مفصل توضیح داده شده اند. با این مقدمه به تحلیل داده ها در این قسمت خواهیم پرداخت.

تحلیل سوالات آزمون

۱- الف) انتگرال های نامعین زیر را محاسبه نمایید.

$$\int x^{۲}dx = \qquad \int \sqrt{x}\mathrm{dx} = \qquad \int \frac{۱}{x^{۳}}\mathrm{dx} = \qquad \int (x^{۲} - \sqrt{x} + \frac{۱}{x^{۳}})\mathrm{dx} =$$

ب) مقدار انتگرال های معین زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\int_{-۳}^{۳} x^{۲}dx = \qquad \int_{۱}^{۴} \sqrt{x}\,\mathrm{dx} = \qquad \int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{x^{۳}}\mathrm{dx} =$$

حل صحیح $\int x^{۲}dx$ و $\int \sqrt{x}dx$ توسط دانش آموز، او را در سطح **عمل** نسبت به مفهوم انتگرال قرار می دهد. چون فرمول انتگرال گیری آن را می داند و شکل تابع بصورت استاندارد فرمول انتگرال گیری می باشد. اما در مورد $\int \frac{۱}{x^{۳}}dx$ چون تابع به صورت استاندار فرمول انتگرال گیری نیست و نیاز به دقت بیشتر دارد و باید آنها را به صورت تواندار بنویسد و بعد انتگرال بگیرد. پاسخ صحیح دانش آموز را در سطح **فرآیند** از مفهوم انتگرال قرار می دهد همچنین حل صحیح $\int (x^{۲} - \sqrt{x} + \frac{۱}{x^{۳}})dx$ دانش آموز را در سطح **فرآیند** از مفهوم انتگرال قرار می دهد. زیرا باید بتواند تمام قسمت های قبلی را صحیح پاسخ دهد و با این سوال مقایسه نموده و تمام فرایند ها رو به صورت یک **شیء** در نظر بگیرد و به پا سخ صحیح بر سد. و همچنین درک صحیح این ق سمت نیازمند این ا ست که دانش آموز سطح **عمل** و **فرآیند** را گذرانده باشد.

نتایج سؤال ۱ قسمت الف بر مبنای APOS

		$\int x^2dx$	$\int \sqrt{x}\mathrm{dx}$	$\int \frac{1}{x^3}\mathrm{dx}$	$\int (x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x^3})\mathrm{dx}$
		عمل	عمل	فرآیند	فرآیند
رشته	ریاضی	۹۶/۷	۶۴/۵	۶۱/۲	۴۵/۱
	تجربی	۹۳/۲	۷۴/۳	۸۵/۹	۵۲/۷
کل		۹۴/۲	۷۱/۴	۷۰/۴	۵۰/۴

با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت در محاسبه ی $\int x^{۲}dx$، ۵/۸ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال قرار دارند. در محاسبه ی $\int \sqrt{x}dx$، ۲۸/۶ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال قرار دارند. در محاسبه ی $\int \frac{۱}{x^{۳}}dx$، ۲۹/۶ درصد دانش آموزان زیر سطح فرآیند از مفهوم انتگرال قرار دارند. و در محاسبه ی $\int (x^{۲} - \sqrt{x} + \frac{۱}{x^{۳}})dx$، ۴۹/۶ درصد دانش آموزان زیر سطح فرآیند از مفهوم انتگرال قرار دارند.

محاسبه صحیح $\int_{-۳}^{۳} x^{۲}dx$ توسط دانش آموز وی را در سطح **عمل** از مفهوم **انتگرال** قرار می دهد. محاسبه صحیح $\int_{۱}^{۴} \sqrt{x}dx$ تو سط دانش آموز وی را در سطح **عمل** از مفهوم **انتگرال** قرار می دهد. پا سخ صحیح به $\int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{x^{۳}}dx$ تو سط دانش آموز وی را در سطح **شیء** از مفهوم **انتگرال** قرار می دهد. زیرا برای پا سخ صحیح دادن به این سوال نیاز به درک تعریف رسمی انتگرال پذیری تابع دارد.

نتایج سؤال ۱ قسمت ب بر مبنای APOS

		$\int_{-3}^{3} x^2 dx$	$\int_{1}^{4} \sqrt{x}\, dx$	$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} dx$
		عمل	عمل	شیء
رشته	ریاضی	۶۷/۷	۵/۸ ۴	۱۲/۹
	تجربی	۵۹/۴	۵۱/۳	۲/۷
کل		۶۱/۹	۶۰/۴	۵/۷

با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت در محاسبه ی $\int_{-3}^{3} x^2 dx$، ۳۸/۱ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال قرار دارند. در محاسبه ی $\int_{1}^{4} \sqrt{x} dx$، ۳۹/۶ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال قرار دارند. و در محاسبه ی $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3} dx$، ۹۴/۳ درصد دانش آموزان زیر سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. در کل تنها ۵/۷ درصد دانش آموزان در سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. و درک ۹۴/۳ درصد دانش آموزان زیر سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. که ممکن است درک آنها در همان سطح فرآیند و یا در سطح عمل باشد و حتی ممکن است در هیچ یک از سطوح نظریه ی APOS نباشند و این یعنی هیچ درکی از مفهوم انتگرال ندارند.

۲- انتگرال های نامعین زیر را محاسبه نمایید.

$$\int e^{3x} dx \qquad \int \frac{1}{2x+3} dx \qquad \int \sin 4x\, dx$$

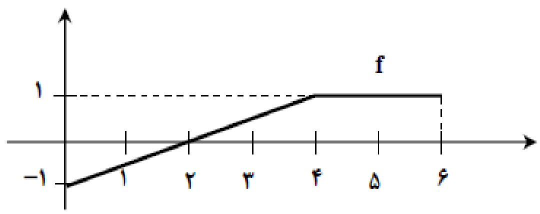
اگر دانش آموز بتواند به این سوالات با توجه به روش جانشانی پاسخ دهد نشان دهنده این است که در سطح **شیء** قرار دارد اما اگر به کمک فرمول هایی که انتگرال گیری را راحت کرده و به شکل روتین جواب دهد در سطح **عمل** قرار دارد. تمامی دانش آموزانی که پاسخ صحیح ارائه نموده بودند از روش دوم استفاده کرده بودند. هدف از طرح این سوال محاسبه انتگرال توابع نمایی و مثلثاتی و توابع گویایی که انتگرال آنها به صورت Ln هست، می باشد. و همچنین ارزیابی درک دانش آموزان از انتگرال این نوع توابع خاص نیز می باشد.

نتایج سؤال ۲ بر مبنای APOS

		$\int \frac{1}{2x+3} dx$	$\int e^{3x} dx$	$\int \sin 4x\, dx$
		عمل	عمل	عمل
رشته	ریاضی	۲۲/۵	۷۷/۴	۵۱/۶
	تجربی	۱۷/۵	۶۶/۲	۵۴/۰
کل		۱۹/۰	۶۹/۵	۵۳/۳

با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت در محاسبه ی $\int \frac{1}{2x+3} dx$، ۸۱/۰ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال این نوع تابع قرار دارند. در محاسبه ی $\int e^{3x} dx$، ۳۰/۵ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال این نوع تابع قرار دارند. و در محاسبه ی $\int \sin 4x\, dx$، ۴۶/۷ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال توابع مثلثاتی قرار دارند.

۳- با توجه به شکل مقابل مقدار $\int_0^6 f(x)dx$ را بدست آورید.



اگر دانش آموزی با توجه به تعریف انتگرال و تبدیل کردن انتگرال به مجموع دو انتگرال با بازه [۰,۲] و [۲,۶] و محاسبه انتگرال های آنها به کمک مساحت به پاسخ صحیح برسید در سطح **شیء** از مفهوم انتگرال قرار می گیرد و سطح او از **شیء** به طرحواره قابل **ارتقاء** است. اما اگر فقط با بدست آوردن مساحت و تفریق کردن مساحت ها به جواب برسد در سطح **فرآیند** از مفهوم انتگرال قرار دارد. که اکثریت دانش آموزان فقط مساحت را محاسبه کرده و به جواب صحیح رسیده اند.

جدول نتایج سؤال ۳ بر مبنای APOS

		محاسبه انتگرال از ۰ تا ۲ به کمک مساحت	محاسبه انتگرال از ۲ تا ۶ به کمک مساحت	$\int_0^6 f(x)dx$
		فرآیند	**فرآیند**	**فرآیند**
رشته	**ریاضی**	**۸۷/۰**	**۷۹/۴**	**۷۰/۹**
	تجربی	**۶۶/۲**	**۶۳/۶**	**۴۰/۵**
کل		**۷۲/۳**	**۶۹/۵**	**۴۹/۵**

با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت در محاسبه ی انتگرال به توجه به نمودار تابع خطی که رسم شده ۵۰/۵ درصد دانش آموزان زیر سطح فرآیند از مفهوم انتگرال قرار دارند. که ممکن است در سطح عمل قرار داشته باشند و اگر هیچ نمره ای از این سوال دریافت نکرده اند در سطح عمل هم قرار ندارند.

۴-به کمک رسم نمودار مقدار انتگرال $\int_{-۲}^{۵}(۲x-۲)\,dx$ را بدست آورید.

برای پاسخ دادن به این سوال دانش آموز ابتدا باید تابع $f(x)=۲x-۲$ را رسم نماید. اگر رسم این تابع که یک خط راست است به کمک نقطه یابی باشد در صورت رسم صحیح آن، دانش آموز را در سطح **فرآیند** قرار می دهد اما اگر با انجام جابجایی و برخی اعمال دیگر روی **شیء** $y=x$ باشید دانش آموز را در سطح **شیء** قرار می دهد.

پس از رسم خط باید مانند سوال ۳ با محاسبه مساحت زیر نمودار پاسخ صحیح را ارائه کند. که با توجه به توضیحاتی که در سوال ۳ داده شد اگر به کمک تعریف انتگرال پاسخ صحیح داده شود در سطح **شیء** قرار دارد اما اگر فقط با محاسبه مساحت باشد در سطح **فرآیند** قرار دارد.

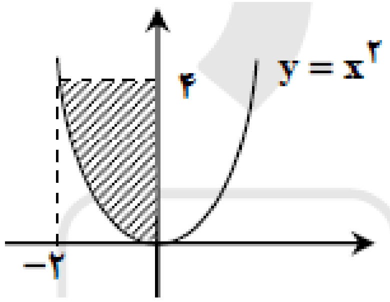
جدول: نتایج سؤال ۴ بر مبنای APOS

		رسم تابع $f(x)=2x-2$	$\int_{-2}^{1}(2x-2)\,dx$ به کمک مساحت	$\int_{1}^{5}(2x-2)\,dx$ به کمک مساحت	$\int_{-2}^{5}(2x-2)\,dx$
		فرآیند	فرآیند	فرآیند	شیء
رشته	ریاضی	**۸۳/۸**	**۳۸/۷**	**۵۱/۶**	**۲۹/۰**
	تجربی	**۸۳/۷**	**۴۳/۲**	**۵۸/۱**	**۲۵/۶**
کل		**۸۳/۸**	**۴۱/۹**	**۵۶/۱**	**۲۶/۶**

با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت در رسم تابع خطی ۱۶/۳ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال قرار دارند. در محاسبه ی $\int_{-۲}^{۱}(۲x-۲)\,dx$ به کمک مساحت، ۵۸/۱ درصد دانش آموزان زیر سطح فرآیند از مفهوم انتگرال این نوع تابع قرار دارند. در محاسبه ی $\int_{-۲}^{۱}(۲x-۲)\,dx$ به کمک مساحت، ۴۳/۹ درصد دانش آموزان زیر سطح فرآیند از مفهوم انتگرال این نوع تابع قرار دارند. و در کل مشخص شد که در محاسبه ی $\int_{-۲}^{۵}(۲x-۲)\,dx$ به کمک رسم نمودار تنها، ۲۶/۶ درصد دانش آموزان در سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. و درک ۷۳/۴ درصد دانش

آموزان زیر سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. که ممکن است درک آنها در سطح فرآیند باشد یعنی دانش آموزانی که قسمت های قبلی را به طور صحیح پاسخ داده اند. و یا ممکن است در سطح عمل باشد و حتی ممکن است در هیچ یک از سطوح نظریه ی APOS نباشند و این یعنی هیچ درکی از مفهوم انتگرال ندارند.

۵-در شکل زیر مساحت قسمت هاشور زده را بدست آورید.



حل صحیح این سوال دانش آموز را در سطح **طرحواره** از مفهوم انتگرال قرار می دهد. برای حل این سوال که مشابه سوال ۳ هست اگر دانش آموز فقط با انتگرال، مساحت زیر نمودار $x^۲$ را بدست آورد می توان گفت در سطح **شیء** قرار دارد. اما در اینجا و همچنین در سوالات مشابه این سوال باید انتگرال تفاضل دو تابع را حساب نمایند و اگر دانش آموزی در سطح طرحواره باشد می تواند به این سوال پاسخ صحیح بدهد. و با توجه به نوع سوال انتظار می رود تعداد کمی از دانش آموزان به این سوال پاسخ صحیح بدهند.

جدول: نتایج سؤال ۵ بر مبنای APOS

		$\int x^2 dx$	$\int_{-2}^{0} x^2 dx$	$\int_{-2}^{0} \lvert x^2 - 4\rvert\, dx$
		گام ۱ : فرآیند	گام ۲ : شیء	گام ۳ : طرحواره
رشته	ریاضی	۷۰/۹	۳۵/۴	۱۹/۳
	تجربی	۷۰/۰	۳۵/۱	۶/۷
کل		۷۵/۲	۳۵/۲	۱۰/۴

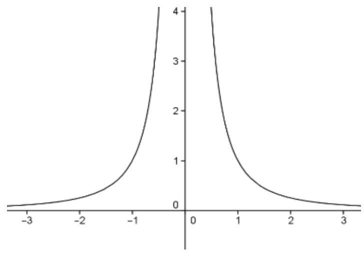
با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت در تشخیص و نوشتن گام ۱ یعنی $\int x^۲ dx$، ۷۵/۲ درصد دانش آموزان زیر سطح عمل از مفهوم انتگرال قرار دارند. در محاسبه ی گام ۲ یعنی $\int_{-۲}^{۰} x^۲\, dx$، ۶۴/۸ درصد دانش آموزان زیر سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. در محاسبه ی گام آخر یعنی $\int_{-۲}^{۰} |x^۲ - ۴|\, dx$ ، تنها ۸۹/۶ درصد دانش آموزان زیر سطح طرحواره از مفهوم انتگرال قرار دارند. و در کل مشخص شد که در محاسبه ی مساحت بین دو منحنی به کمک انتگرال تنها، ۱۰/۴ درصد دانش آموزان در سطح طرحواره از مفهوم انتگرال قرار دارند.

۶- دانش آموزی از دومین قضیه اساسی استفاده کرده و انتگرال زیر را محاسبه کرده است :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big[_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

آیا جواب او قابل قبول است؟ به کمک نمودار تابع،پاسخ دهید.

حل صحیح این سوال دانش آموز را در سطح **شیء** از مفهوم انتگرال قرار می دهد که می تواند به سطح طرحواره ار تقاء پیدا کند. چون با توجه به نمودار تابع و همچنین درک تعریف انتگرال پذیر بودن تابع به سوال باید پاسخ دهد. اما اگر با توجه به ضابطه تابع پاسخ صحیح بدهد فقط در سطح **شیء** قرار دارد.



جدول : نتایج سؤال ۶ بر مبنای APOS

		پاسخ صحیح : (خیر)	**بیان دلیل درست**
		پایین تر از سطح شیء	**شیء**
رشته	**ریاضی**	**۶۷/۷**	**۲۵/۸**
	تجربی	**۶۲/۱**	**۱۷/۵**
کل		**۷۰/۵**	**۲۰**

با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت تنها ۲۰/۰ درصد دانش آموزان در سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. ۸۰/۰ درصد دانش آموزان زیر سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. که ممکن است در سطح فرآیند و یا عمل باشند و اگر هیچ نمره ای کسب نکرده باشند در هیچ یک از سطوح قرار ندارند.

۷- انتگرال های نا معین زیر را محاسبه نمایید.

$$\int (۳x+۱)^{۲}dx =$$

$$\int (۳x+۱)^{۱۰۰}dx =$$

حل صحیح $\int (۳x+۱)^{۲}dx$ توسط دانش آموز، او را در سطح **فرآیند** نسبت به مفهوم انتگرال قرار می دهد. زیرا ابتدا باید با بسط $(۳x+۱)^{۲}$ به صورت $۹x^{۲}+۶x+۱$ بنویسد و سپس از آنها انتگرال بگیرد.

حل صحیح $\int (۳x+۱)^{۱۰۰}dx$ توسط دانش آموز، او را در سطح شیء نسبت به مفهوم انتگرال قرار می دهد و می تواند به سطح طرحواره ارتقاء پیدا کند. زیرا باید به روش جانشانی این انتگرال را حل کند. با توجه به پاسخ دانش آموزان به این قسمت نتایج در جدول ۴. ۵۶ ارائه گردیده است.

جدول : نتایج سؤال ۷ بر مبنای APOS

		$\int (3x+1)^2dx$	$\int (3x+1)^{100}dx$
		فرآیند	شیء
رشته	ریاضی	۶۱/۲	۱۹/۳
	تجربی	۵۹/۴	۶/۷
کل		۶۰	۱۰/۴

با توجه به نتایج جدول می توان نتیجه گرفت در محاسبه ی $\int (3x+1)^{2} dx$، ۶۰/۰ درصد دانش آموزان در سطح فرآیند از مفهوم انتگرال قرار دارند. در محاسبه ی $\int (3x+1)^{100} dx$، تنها ۱۰/۴ درصد دانش آموزان در سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند. و در کل سوال می توان نتیجه گرفت ۸۹/۶ درصد دانش آموزان زیر سطح شیء از مفهوم انتگرال قرار دارند که ممکن است در سطح فرآیند و یا عمل باشند و اگر هیچ نمره ای کسب نکرده باشند در هیچ یک از سطوح قرار ندارند.

بحث و نتیجه گیری

نتایج این تحقیق نشان داد که اکثر دانش آموزان مفهوم انتگرال را به خوبی درک نکرده و مشکلات فراوانی با این مفهوم دارند. عملکرد ضعیف دانش آموزان در پاسخ به سؤالات آزمون این نکته را به خوبی مشخص میکند که ساخت و سازهای مفهوم انتگرال در ذهن اکثر آنها بسیار ناقص است. این دانش آموزان در پاسخ به سؤالات مفهومی انتگرال نتوانستند نتایج خوبی را نمایان سازند ولی در پاسخ به سؤالات روتین که نیاز به درک مفهومی ندارد خوب عمل کرده اند. به عبارت دیگر در مبنای چارچوب APOS سطح یادگیری دانش آموزان در یادگیری مفهوم انتگرالدر سطح عمل یا فرایند است و نتوانسته به سطح شیء ارتقاء پیدا کند یا بهتر است بگوییم شیء انتگرال در ذهن اکثر دانش آموزان تشکیل نشده است و دانش آموزانی که قادر به تشکیل طرحواره های انتگرال در ذهن خود گشته اند تعداد انگشت شماری از نمونه مورد مطالعه هستند. نتایج این تحقیق با نتایجی که از تحقیق خانم شریفی (۱۳۹۴) گزارش شده بود مبنی بر اینکه درک اکثر یادگیرندگان در مفهوم حد نیز زیر سطح شیء است مطابق بوده و کمی با نتایج تحقیق ماهاراج (۲۰۱۰) که روی مفهوم حد انجام داده بود متفاوت است چون در تحقیق وی درصد افرادی که قادر به تشکیل شیء حد گشته بودند کمی بیشتر از در صد نمونه شرکت کننده در این تحقیق بوده است. البته اکثر تحقیقاتی که در زمینه مفاهیم مختلف انجام شده است نشان داده اند که ساختارهای ذهنی مفاهیم مختلف در ذهن یادگیرندگان در سطوح پایین یادگیری قرار دارد که همین نتایج باعث تغییرات روش های آموزشی از جانب آموزشگران ریاضی در سالهای اخیر گشته است.

منابع

۱. چمن آرا، سپیده .(۱۳۸۴) .آ شنایی با رو شهای تدریس ریا ضی مبتنی بر ساخت و سازگرایی .ر شد آموزش ریاضی، سال . ۱۳۸۴ شماره . ۸۱ ص۲۱ -۳۱.

۲. حســـامی، جواد،(۱۳۹۵). بررســـی درک دانش‌آموزان ســـال ســـوم تجربی از مفهوم تابع در چارچوب نظری . APOSپایان نامه کارشناسی ارشد. تهران. دانشگاه شهید.

۳. خیر الله زاده، رحیم،(۱۳۹۵). بررســـی و تعیین ســطح یادگیری دانش آموزان پســر ســوم ریاضــی فیزیک دبیرستان از مبحث مشتق توابع مثلثاتی به کمک نظریه. APOSپایان نامه کار شنا سی ار شد. تهران. داز شگاه شهید رجایی.

۴. شریفی، زهرا،(۱۳۹۴). بررسی درک دانش آموزان سال سوم متوسطه دختر از مفهوم حد در چارچوب نظریه apos. پایان نامه کارشناسی ارشد. تهران. دانشگاه شهید رجایی.

۵. علم الهدایی، سید حسن.(۱۳۸۸). اصول آموزش ریاضی .دانشگاه فردوسی مشهد .انتشارات جهان فردا .ص۹۳

۶. گمنام، حســین، (۱۳۹۶).بررســی و مقایســه درک دانش‌آموزان ســال ســوم ریاضــی وتجربی دبیرســتان‌های شهرستان‌های فردوس ومه‌ولات ازمفهوم حدتحت چارچوب نظریه‌یAPOS. دانشگاه فردوسی مشهد

۷. مترجمان :عبدی، حسین .فدایی، محمدرضا و گویا، زهرا (۱۳۸۶). رشد آموزش ریاضی سال۱۳۸۶. شماره۸۸

۸. نظری، کامل.(۱۳۹۰) بررسی تاثیر تدریس بر میزان درک دانش آموزان دختر سال سوم ریاضی از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آنها با تأ کید بر فعالیت های مبتنی بر تجسم .پایان نامه کارشناسی ارشد .تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

۹. Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathewes, K. (۱۹۹۷). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, CBMS *Issue in mathematics Education*, ٦, ١-٣٢.

۱۰. Bezuidenhout, J. (۲۰۰۱). limits and continuity : some conceptions of Frirst – year students. *international journal of mathematical Eduction in science and Technology,* ۳۲, ۴۸۷- ۵۰۰.

۱۱. Brown, A. Devries, D.J. Dubinsky, E. Thomas, K. (۱۹۹۷). Learning Binary Operation, Groups, and Subgroup. *Journal of mathematical Behavior*, ۱۶, ۴, ۱۸۷-۲۳۹.

١٢.Cottrill, Jim. Dubinsky, Ed. Nichols, D. Schwingendorf, K. Thomas, K. Vidakovic, D. (۱۹۹۶). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. Georgia State University. *Journal of Mathematical Behavior*

۱۳. Davis, R. & vinner,S. (۱۹۸۶). The notion of limit : some seemingly unavoidable misconception stages. *in journal of mathematical Behavior*, ۵, ۲۸۱-۳۰۳.

۱۴. Dubinsky, E. & McDonald, M.A. (۲۰۰۱). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton et al. (eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. ۲۷۳-۲۸۰).

۱۵. Dubinsky, E. (۱۹۹۱). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D.Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. ۹۵–۱۲۶.)

۱۶. Maharaj, A. (٢٠١٠). An Apos Analysis of Student ' Understanding of the Concept of a Limit of a Function. Pythagoras, ٧١, ٤١-٥٢.

۱۷. Maharaj, A. (۲۰۱۳). An Apos Analysis of natural science Student' Understanding of derivatives.*South African Journal of Education*. ۳۳(۱). ۱-۱۹.

۱۸. Maharaj, A. (۲۰۱۳). An Apos Analysis of natural science Student' Understanding of integration. *South African Journal of Education*, ۳(۱), ۵٤-۷۳.

۱۹.*Maharaj, A. (۲۰۱٤). An APOS Analysis of Natural Science Students' Understanding of Integration. REDIMAT, ۳(۱), ۵٤-۷۳. doi: ۱۰,٤٤۷۱/redimat.*۲۰۱٤,٤۰

۲۰. Tall, D., Davis, G. & Thomas, M. (۱۹۹۷). What is the object of the encapsulation of process. Published proceeding of MERGA, Rtarua, New zealand. Vol ۲, pp, ۱۳۲-۱۳۹.

۲۱. Weyer, s. (۲۰۱۰). APOS Theory as a Conceptualization for Understanding Mathematical Learning. ۲۰۱۰ *Senior Seminar: Cognitive Development and the Learning of Mathematics.* ۹-۱۵.