

**Improving the Understanding of the Area of Sphere  
based on the 5E Teaching Model**

**Hossein Tadi Beni\***

Farhangian University, Isfahan Shahid Bahonar Campus, Isfahan, Iran

**Abstract:** The purpose of this research is to present an idea to resolve the misunderstandings and mistakes of students regarding the lack of understanding of the area of the sphere, so that students do not only seek to remember mathematical relationships and formulas, but with this method of discover and get to know them. This article is written in a qualitative and action research style and the 5E teaching model is as a proposed method. The statistical sample of this research was 11 students of the twelfth year, majoring in mathematics from Imam Ali (AS) high school in the city of Ben. The results showed that by using teaching based on the E5 model, the mistakes and misunderstandings of the students about not understanding the area of the sphere were reduced and a significant part of the students answered the questions correctly.

**Keywords:** Action Research, 5E Teaching Model, Sphere, Area

---

\* Corresponding Author, Email: [tadi.beni.hossein@gmail.com](mailto:tadi.beni.hossein@gmail.com)

## بهبود درک و فهم مساحت کره بر اساس الگوی تدریس $\text{OE}$

حسین طادی بنی\*

دانشجوی کارشناسی آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان شهید باهنر اصفهان، اصفهان، ایران

**چکیده:** هدف از پژوهش حاضر ارائه‌ی یک ایده، برای رفع بدفهمی‌ها و اشتباهات دانش‌آموزان در مورد عدم درک مساحت کره است به‌صورتی که دانش‌آموزان تنها به دنبال به خاطر سپردن روابط و فرمول‌های ریاضی نبوده بلکه با شیوه‌ی کشف آن‌ها نیز آشنا شوند. این مقاله به روش کیفی و از نوع اقدام پژوهی نوشته شده و از الگوی تدریس  $\text{OE}$  نیز برای بیان راه حل پیشنهادی استفاده شده است. نمونه آماری این تحقیق ۱۱ نفر از دانش‌آموزان سال دوازدهم، رشته ریاضی از دبیرستان امام علی (ع) شهر بن بوده است. نتایج نشان داد که با استفاده از تدریس بر اساس الگوی  $\text{OE}$ ، اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد عدم درک مساحت کره کاهش یافته و بخش قابل توجهی از دانش‌آموزان به سوالات پاسخ درست دادند.

**واژگان کلیدی:** اقدام پژوهی، الگوی تدریس  $\text{OE}$ ، کره، مساحت

## مقدمه

آموزش هندسه به شیوه معلم محور، تجویزی و رویه مدار انجام می شود (باینس، ۱۹۹۸) به گفته انجمن ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰) این روش ها (معلم محور و تجویزی) رشد خلاقیت، تجسم و ادراک را محدود می کند و این رویکرد برای بسیاری از دانش آموزان و معلمان مشکل آفرین بوده و هر دو گروه، هندسه را موضوعی زجرآور دانسته اند (مالوی و فریل، ۱۹۹۹) از این رو معلم باید با انتخاب الگوی تدریس مناسب دانش آموزان را در فرآیند تدریس مشارکت داده تا آنها دانش را کشف کنند. از جمله مفاهیم هندسی می توان به مساحت، حجم و اشکالی مانند دایره و کره اشاره کرد.

بدهمی ها از عواملی هستند که منجر به بروز مشکلات جدی در یادگیری ریاضیات می شوند بدهمی ها به طور مستقل وجود ندارند بلکه در یک چارچوب مفهومی خاص بروز می کنند و می توانند با تغییرات چارچوب تغییر کنند یا ناپدید شوند شناخت بدهمی ها و ریشه های ایجاد آن ها در حوزه های مفهومی و در سطوح مختلف تحصیلی می تواند موجب ارتقا یادگیری شود زیرا بدهمی ها بخشی از ساختار مفهومی ذهن دانش آموزان را تشکیل می دهند که با مفهوم جدید در تعامل است. به این دلیل که بدهمی ها منشا بروز خطا هستند این تأثیرات اغلب منفی هستند (استرایک، ۱۹۸۳) یکی از بدهمی های رایج هندسه، مساحت شکل های هندسی مانند کره است که دانش آموز نمی تواند مفهوم سطح کره را درک کند.

تجسم فضایی در دانش آموزان به قدر کافی رشد نکرده و آنها نمی توانند قسمت های ناپیدا از یک شکل هندسی را تشخیص دهند (اوترد، ۲۰۰۳). به همین دلیل دانش آموزان در تعمیم اشکال هندسی از فضای دو بعدی به سه بعدی دچار مشکل هستند. یکی از این شکل ها، تعمیم دایره در سه بعد یا همان کره است. کره یک حجم هندسی کاملاً گرد و در فضای سه بعدی است. کره همانند دایره در دو بعد در فضای سه بعدی و به طور متقارن گرداگرد یک نقطه قرار دارد. اما همانگونه که گفته شد دانش آموزان تصور فضایی خوبی ندارند و به عقیده جونز (۲۰۰۲)، از آنجایی که ما در جهان سه بعدی زندگی می کنیم و بیشتر تجربه ها از طریق محرک های دیداری به دست می آید لازم است یک درک واقعی از کره به دانش آموز داده شود نه یک تصور ذهنی و انتزاعی. بنابراین معلم می تواند از اشیا کروی پیرامون خود نظیر توپ یا کره زمین استفاده کند تا دانش آموز از طریق محرک های دیداری درک بهتری نسبت به آن داشته باشد.

از طرفی هر یک از اشکال هندسی، دارای مساحت مشخصی هستند اما معلمین در آموزش مساحت فرمول را جایگزین اندازه گیری کرده و همین مانع از درک دانش آموز می شود (لهر، ۲۰۰۳). پس معلم باید از واحد های سطح استفاده کند تا دانش آموز درک عمیقی از مفهوم مساحت پیدا کنند سپس به سراغ فرمول ها و روابط برود. در حجم های کروی نیز معلم می باید از اشیا ملموس مانند توپ استفاده کند و با رنگ زدن سطح آن مفهوم مساحت را توضیح دهد.

حسام (۱۳۸۴) بیان می کند که در ریاضیات مفاهیم به صورت سلسله مراتبی (مرحله به مرحله)، شکل گرفته و این ویژگی موجب می شود تا یادگیری هر مفهوم به درک و برداشت دانش آموز از مفاهیم پیش نیاز آن وابسته باشد از همین روی معلم باید مفهوم فضای دو بعدی و اشکال هندسی در این فضا را برای دانش آموز تبیین کرده و سپس به بیان فضای سه بعدی و حجم های کروی بپردازد از طرفی میچلمور و وایت (۲۰۰۷) بیان می کنند که اغلب دانش آموزان مفاهیم انتزاعی را جداگانه و بدون درگیر شدن، در یک فرآیند انتزاعی یاد می گیرند پس معلم نباید صرفاً بیان کننده ی فرمول های ریاضی باشد بلکه باید با طراحی یک فعالیت، منجر به کشف روابط ریاضی توسط خود دانش آموز شود.

### روش پژوهش

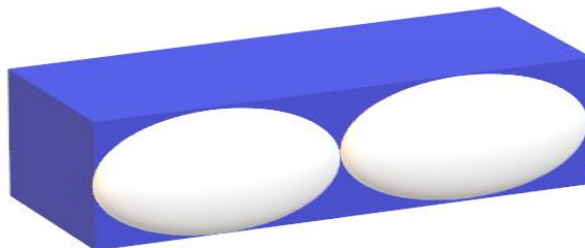
در این پژوهش از روش کیفی و نوع اقدام پژوهی استفاده شده است. این روش تحقیق دارای چهار مرحله به شرح زیر است.

۱. طرح و نقشه
۲. عمل
۳. مشاهده
۴. بازبینی

۱. **طرح و نقشه:** مشاهدات نشان می دهد که دانش آموزان در فهم فرمول مساحت کره دچار مشکل هستند و چرایی این رابطه را به درستی درک نمی کنند در این پژوهش می خواهیم راهکاری را پیشنهاد داده و انجام دهیم تا فراگیران بتوانند به کمک معلم خود، مساحت کره را محاسبه کنند.

**گرد آوری شواهد ۱:** آزمون نخست (پیش آزمون) که از دانش آموزان گرفته شده به همراه مستندات آن به شرح زیر است. هدف از این آزمون، اثبات وجود بدفهمی و مشکل در مورد مساحت کره و محاسبه ی آن توسط دانش آموزان بوده است.

۱. مساحت دو کره درون مکعب مستطیل برابر  $157cm^2$  است. طول، عرض و ارتفاع مکعب را به دست آورید.



شکل ۱. دو کره محاط شده در یک مکعب مستطیل

۲. یک بادکنک کروی شکل را با فشار درون یک استوانه مملو از آب به حجم  $480cm^3$  فرو می کنیم اگر با این کار  $108cm^3$  آب از استوانه به بیرون بریزد مساحت بادکنک را به دست آورید ( $\pi = 3$  فرض شود).

#### تجزیه، تحلیل و تفسیر داده ها

پس از اینکه دو پرسش فوق را در قالب یک آزمون در اختیار ۱۱ نفر از دانش آموزان دوازدهم رشته ریاضی فیزیک قرار دادیم پاسخ ها را جمع آوری کرده و نتایج آن را در جدول زیر تنظیم کردیم همانگونه که در جدول زیر مشخص است بخش قابل توجهی از دانش آموزان (بیش از نیمی از آنها) یا به سوالات پاسخ نداده، یا اشتباه پاسخ داده و یا جزئی از حل را نوشته اند بنابراین طبق جدول زیر می توان گفت دانش آموزان در مورد مساحت و حجم کره دچار مشکل هستند.

جدول ۱. تجزیه و تفسیر داده های مشاهده ۱

سوال ۱	سوال ۲	اشتباه/ بی پاسخ	جزئی از حل	نیمی از حل	حل تقریباً درست	حل درست
سوال ۱	۳	۲	۰	۱	۵	
سوال ۲	۴	۱	۲	۰	۴	

در این پژوهش از الگوی ۵E استفاده شده است که از پنج مرحله تشکیل شده است:

- درگیر کردن
- کاوش کردن
- توضیح دادن
- شرح و بسط دادن
- ارزیابی کردن

۲. **عمل:** مساحت کره را بر اساس الگوی تدریس ۵E که شامل پنج مرحله است بیان می کنیم

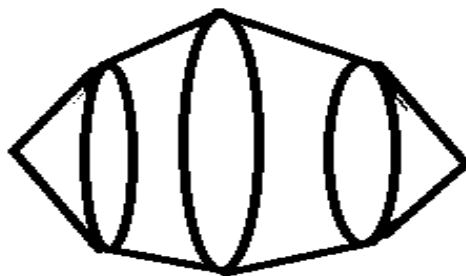
**درگیر کردن:** در این مرحله پرسشی را مطرح می کنیم تا دانش آموزان را به فکر و داشته و ذهن آن ها را درگیر به یافتن پاسخی برای این پرسش، سازیم. توجه داشته باشید. فعالیت درگیری را می توان در قالب داستان، انیمیشن، فیلم و عکس یا طرح یک مسئله عنوان کرد. بنابراین در ذیل مسئله ای را مرتبط با مساحت کره مطرح می کنیم که می تواند به عنوان فعالیت درگیری در محیط آموزشی (کلاس درس) بیان شود.

مسئله: سازمان تبلیغات اسلامی می خواهد برای سالروز پیروزی انقلاب اسلامی در ۲۲ بهمن ماه در میدان آزادی، بالنی را به هوا بفرستد. سازنده بالن برای رنگ آمیزی آن باید رنگ خریداری کند اما پیش از خرید می خواهد میزان رنگ مورد نیاز را حساب کند. اگر قطر بالن ۳۰ متر بوده و برای رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱/۵ کیلوگرم رنگ نیاز داشته باشد برای رنگ آمیزی این بالن چند کیلوگرم رنگ مورد نیاز است؟

واضح است که برای محاسبه ی میزان رنگ مورد نیاز باید مساحت سطحی که نیاز به رنگ آمیزی دارد را حساب کرد. از این جهت برای پاسخ به این پرسش باید مساحت کره را محاسبه کرد. اما چگونه؟. بنابراین معلم با مطرح کردن این پرسش دانش آموزان را با چالش مواجه کرده و آنها را درگیر حل این مسئله می کند.

**کاوش کردن:** در این مرحله معلم نقش جدی تری پیدا می کند و دانش آموزان را به سمتی هدایت می کند تا بتوانند راه حلی را برای مسئله و پرسش مطرح شده پیدا کنند در این مرحله دانش آموزان فرصتی برای یادگیری مشارکتی پیدا می کنند ایده ها و طرح های خود را در گروه به اشتراک گذاشته و پیرامون آن به بحث و تبادل نظر می پردازند معلم در اینجا نه تنها شروع کننده بحث است بلکه با مشاهده، گوش دادن و توجه به دانش آموزان سعی در مدیریت بحث دارد.

**گام اول:** کره یک حجم سه بعدی است. از آنجایی که دانش آموزان در تجسم فضایی و تصور قسمت های ناپیدای آن شکل دچار مشکل هستند (اوترد، ۲۰۰۳) و از طرفی نمایش فضای سه بعدی بر روی فضای دو بعدی (کاغذ) ممکن نیست ما از دایره استفاده می کنیم و آن را به کره تعمیم می دهیم. شکل زیر را درون یک کره محاط می کنیم.

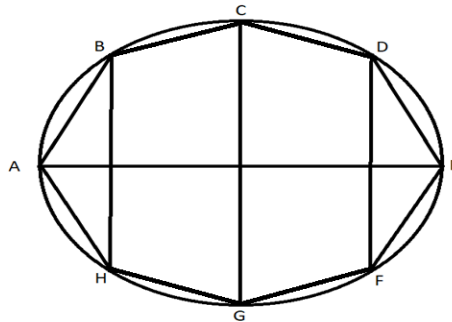


شکل ۲. شکل ابتدایی برای تعمیم به کره



شکل ۳. هشت ضلعی منتظم محاط شده در درون کره

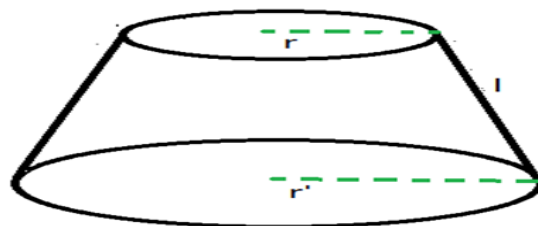
اما با توجه به محدودیت های گفته شده آن را در فضای دو بعدی، بازسازی می‌کنیم. فضای دو بعدی: هشت ضلعی منتظمی را درون یک دایره محاط می‌کنیم.



شکل ۴. هشت ضلعی محاط شده درون دایره در دو بعد

با توجه به مطالب گفته شده ABH و DEF در حالت سه بعدی، مخروط و چهارضلعی های HBCG و GCDF در فضای سه بعدی، مخروط های ناقص هستند. که مساحت آنها برابر است با

$$s_{\text{کامل}} = \pi r l \quad s_{\text{ناقص}} = \pi(r + r')l$$



شکل ۵. مساحت جانبی مخروط ناقص

گام دوم: توجه داشته باشید که هدف این پژوهش، محاسبه ی مساحت کره است و ما برای این کار به محاسبه ی مساحت مدلی که در شکل ۳ ساخته ایم می پردازیم که یک تقریب نادقیق برای مساحت کره است اما با توجه به محدودیت موجود (عدم نمایش فضای سه بعدی بر روی صفحه) از شکل شماره ی ۴ استفاده می کنیم (هشت ضلعی محاطی).

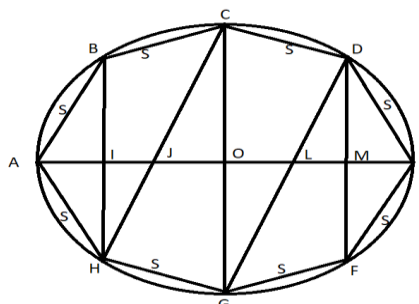
قطر دایره AE محور تقارن هشت ضلعی رسم شده است پس خطوط BH، CG و DF موازی هستند

$$BH \parallel CG \parallel DF$$

خطوط BA، CH، DG و EF موازی هستند (با توجه به ویژگی هشت ضلعی منتظم)

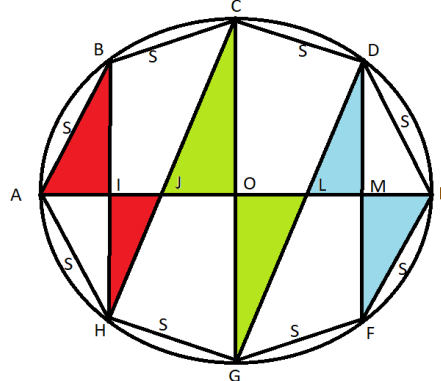
$$EF \parallel DG \parallel CH \parallel BA$$

بنابراین پس از رسم خطوط BH، CG، DF، CH، BA، DG، EF داریم



شکل ۶. هشت ضلعی محاط شده

از آنجایی که هشت ضلعی محاط شده منتظم است طول اضلاع را برابر با  $S$  در نظر می گیریم همچنین محل تقاطع خطوط رسم شده را با قطر  $AE$  به ترتیب از چپ به راست  $I, J, O, L, M$  نام گذاری می کنیم. بر روی این هشت ضلعی مثلث هایی به وجود می آید. شش عدد از این مثلث ها را در نظر می گیریم توجه کنید که این مثلث ها دوجه دو همنهشت هستند. مثلث های همنهشت با رنگ آمیزی یکسان بر روی شکل نشان داده شده اند.



شکل ۷. هشت ضلعی رنگ آمیزی شده

دلیل همنهشتی دو مثلث  $ABI$  و  $IHJ$  را نوشته و علت همنهشتی دو جفت مثلث دیگر به طریق مشابه ثابت می شود.

$$\widehat{AIB} = \widehat{HIJ} = 90^\circ$$

$$BI = HI$$

بنا به قضیه خطوط موازی و خط مورب  $\widehat{ABI} = \widehat{IHJ}$  پس بر اساس حالت دو زاویه و ضلع بین، مثلث های  $ABI$  و  $IHJ$  همنهشت هستند.

با توجه به همنهشتی هر جفت از مثلث ها می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} (1) \text{ } \triangle ABI \text{ و } \triangle IHJ: & \begin{cases} AI = IJ = d_1 \\ BI = IH = r_1 \end{cases} \\ (2) \text{ } \triangle CJO \text{ و } \triangle OGL: & \begin{cases} JO = OL = d_2 \\ CO = GO = r_2 \end{cases} \\ (3) \text{ } \triangle LMD \text{ و } \triangle MFE: & \begin{cases} LM = ME = d_3 \\ DM = MF = r_3 \end{cases} \end{aligned}$$

از طرفی چهار مثلث  $ABI$ ،  $CJO$ ،  $IDM$  و  $ADE$  متشابه هستند زیرا

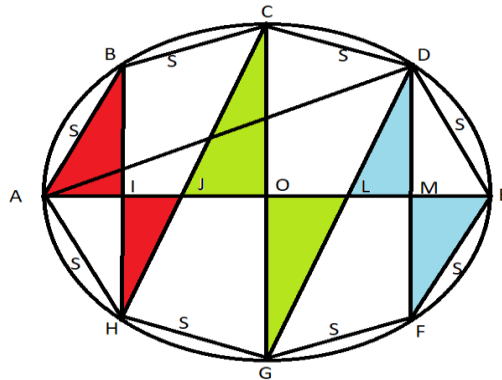
$$\widehat{AIE} = \widehat{JOC} = \widehat{LMD} = \widehat{ADE} = 90^\circ$$

$$\widehat{BAI} = \widehat{CJO} = \widehat{DLM} = \widehat{AED}$$

پس این چهار مثلث بنا به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

است.  $90^\circ$  زاویه ی محاطی روبه رو به قطر است پس اندازه ی آن برابر با  $\widehat{ADE}$  توجه داشته باشید که زاویه ی مورب است پس بنا به قضیه ی خطوط موازی و  $AE$  و  $BA$  و  $CH$  و  $DG$  و  $EF$  همچنین از آنجایی که نتیجه می  $DEM$  و  $DLM$  مساوی هستند و با توجه به همنهشتی مثلث های  $\widehat{BAI} = \widehat{CJO} = \widehat{DLM}$  مورب، زاویه ی شود که

$$\widehat{BAI} = \widehat{CJO} = \widehat{DLM} = \widehat{AED}$$



شکل ۸. تصویر مثلث ADE در هشت ضلعی رنگ آمیزی شده

با توجه به اینکه چهار مثلث ABI، COJ، LDM و ADE متشابه هستند با توجه به نسبت تشابه اضلاع این مثلث ها داریم

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r_3}{d_3} = \frac{AD}{s}$$

اگر هر یک از این نسبت ها را جداگانه با  $\frac{AD}{s}$  برابر قرار دهیم می توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} (1) r_1 s = d_1 AD \\ (2) r_2 s = d_2 AD \\ (3) r_3 s = d_3 AD \end{cases}$$

$$r_1 s + r_2 s + r_3 s = d_1 AD + d_2 AD + d_3 AD \Rightarrow s(r_1 + r_2 + r_3) = AD(d_1 + d_2 + d_3)$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = \frac{AD}{s}(d_1 + d_2 + d_3)$$

**گام سوم:** حالا مساحت مدل ساخته شده (که با هشت ضلعی منتظم در دایره معادل سازی شده است) را محاسبه می کنیم. توجه داشته باشید که مدل ما در فضای سه بعدی از چهار قسمت تشکیل شده است. دو مخروط قائم در طرفین و دو مخروط ناقص که در بین مخروط های قائم قرار دارد. در فضای دو بعدی و با توجه به شکل ۵، مخروط های کامل همان مثلث های EDF، ABH و مخروط های ناقص چهار ضلعی های CDFG، BCGH هستند

+مخروط ناقص سمت چپ(BCGH)+مخروط قائم سمت چپ(ABH)=مساحت مدل

مخروط قائم سمت راست(EDF)+مخروط ناقص سمت راست(CDFG)

با نشان دادن مساحت با L داریم:

$$L = \pi S r_1 + \pi(r_1 + r_2)s + \pi(r_2 + r_3)s + \pi S r_3$$

از عامل  $\pi S$  فاکتور می گیریم

$$L = \pi S(r_1 + (r_1 + r_2) + (r_2 + r_3) + r_3) \Rightarrow L = \pi S(2r_1 + 2r_2 + 2r_3) = 2\pi S(r_1 + r_2 + r_3)$$

با توجه به محاسبات پایانی در گام دوم می توان نوشت:

$$L = 2\pi S\left(\frac{AD}{s}(d_1 + d_2 + d_3)\right)$$

با در نظر گرفتن شکل ۷ و همنهشتی مثلث ها داریم:

$$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{AE}{2}$$

با جایگذاری در رابطه ی مساحت مدل داریم:

$$L = 2\pi S\left(\frac{AD}{s} \times \frac{AE}{2}\right) \Rightarrow L = \pi ADAE$$

با توجه به شکل ۷ استنباط می شود که  $AE = 2r$  پس می توانیم رابطه ی مساحت را اینگونه بازنویسی کنیم:

$$L = \pi AD^2 r$$



توجه کنید که اگر تعداد اضلاع چند ضلعی محاط شده در دایره را افزایش دهیم نقطه ی D به نقطه ی E نزدیک و نزدیک می شود در نتیجه طول پاره خط AD به طول پاره خط AE نزدیک می شود و زمانی که نقطه ی D بر روی نقطه ی E منطبق شود مدل ساخته شده به کره تبدیل خواهد شد و مساحت آن با مساحت کره برابر می شود. اگر تعداد اضلاع چند ضلعی را n در نظر بگیریم داریم

$$n \rightarrow \infty : AD \rightarrow AE \Rightarrow \begin{cases} AE = 2r \\ AD \rightarrow 2r \end{cases}$$

پس مساحت کره برابر است با

$$L = \pi 2r 2r = 4\pi r^2$$

### ۳. مشاهده

**توضیح دادن:** در این مرحله دانش آموزان همه آنچه را که از مراحل جذب و کاوش فراگرفته اند، توضیح می دهند. این مرحله به دانش آموزان فرصت می دهد تا هر آنچه را که یاد گرفته اند به کار بگیرند و بکوشند بین تجربه های خود و مطالب آموخته شده ارتباط برقرار کنند در وهله معلم می تواند در حین توضیح دادن دانش آموز به بدفهمی های آنان پی برده و به رفع آنها اقدام کند. بر اساس مشاهدات می توان بدفهمی های زیر را در این رابطه بر شمرد.

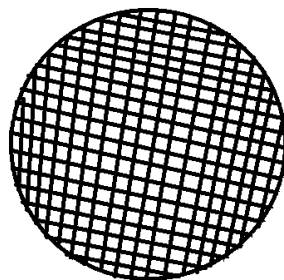
۱. استفاده از رابطه مساحت دایره برای محاسبه ی مساحت کره  
از آنجا که کره در واقع تعمیم دایره در محیط سه بعدی است، این بدفهمی از عدم درک و تصور فضای سه بعدی ناشی می شود. معلم باید بتواند انتقال مناسبی از فضای دو بعدی به سه بعدی داشته باشد تا دانش آموز اشکال دو بعدی را در سه بعد بازسازی کند. مربی می تواند از اشکالی نظیر مربع و مستطیل که در دو بعد ساخته شده و در فضای سه بعدی به مکعب تعمیم داده می شوند استفاده کند و مثال ملموس آن فضای کلاس است که دارای طول، عرض و ارتفاع است. می توان برای معرفی فضای سه بعدی یک حجم کروی مانند توپ را به سر کلاس برد تا دانش آموز درک بهتری نسبت به کره پیدا کند

۲. عدم درک تمایز میان مساحت و حجم کره  
ما در یک دنیای سه بعدی زندگی می کنیم که در آن بیشتر تجربه های خود را از طریق محرک های دیداری به دست می آوریم (جونز، ۲۰۰۲). پس اگر بتوان آموزش ریاضیات را نیز به کمک ابزارهای دیداری انجام داد تاثیر گذاری بیشتری دارد. پس می توان یک توپ و مقداری رنگ را همراه خود به سر کلاس برد و با رنگ آمیزی کردن آن، مفهوم مساحت را توضیح داد و همین طور با برش دادن توپ و تقسیم آن به دو نیم کره و پر کردن داخل آن با مایعی مانند آب تصویری از مفهوم حجم را در ذهن دانش آموز ایجاد کرد.

### شرح و بسط دادن:

در این مرحله فرصتی برای دانش آموزان فراهم می شود تا با کسب تجربه های جدید، اطلاعات و توانایی های کسب شده در مرحله قبل را گسترش دهند. در این مرحله معلم با قرار دادن دانش آموز در موقعیتی جدید می تواند مهارت ها و درک مفهومی او را با طرح پرسش ها و تکلیف هایی با سطح تجزیه و تحلیل عمیق تر به چالش بکشد و گسترش دهد.

پرسش: حجم یک کره را چگونه می توان محاسبه کرد؟  
دانش آموزان در مراحل پیشین با چالشی برای یافتن مساحت کره مواجه شدند حال باید با استفاده از تجربه های کسب شده بتوانند حجم کره را محاسبه کنند. معلم می تواند به عنوان یک ناظر، بحث های را دنبال کند و به آنها جهت دهد. دایره ای مشبک (شبکه، شبکه) را برای دانش آموزان رسم کرده و به آنها توضیح می دهد که هر شبکه در واقع یک هرم با قاعده ی چهار ضلعی است که قاعده ی هرم بر روی سطح کره قرار داشته و راس آن در مرکز کره است.



شکل ۹. دایره مشبک

حال از دانش آموزان خواسته می شود با توجه به حجم هرم، حجم کره را محاسبه کنند.

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times B \times H$$

منظور از  $V_{\text{هرم}}$  مساحت هرم،  $B$  مساحت قاعده و  $H$  ارتفاع آن است.

همانگونه که از شکل ۸ مشخص است حجم کره برابر با حجم هرم هایی است که قاعده ی آن بر روی سطح کره قرار داده اند اگر تعداد هرم ها را  $n$  در نظر بگیریم داریم

$$V_{\text{کره}} = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

کاملاً مشخص است که ارتفاع هرم ها برابر با شعاع کره است پس  $H = R$  پس رابطه حجم کره را بازنویسی می کنیم.

$$V_{\text{کره}} = \frac{B_1 H}{3} + \frac{B_2 H}{3} + \dots + \frac{B_n H}{3} = \frac{B_1 R}{3} + \frac{B_2 R}{3} + \dots + \frac{B_n R}{3} = R \left( \frac{B_1}{3} + \frac{B_2}{3} + \dots + \frac{B_n}{3} \right) = R \left( \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_n}{3} \right) = \frac{R}{3} (B_1 + B_2 + \dots + B_n)$$

توجه داشته باشید منظور از  $B_i, 1 \leq i \leq n$  مساحت قاعده ی اهرام است که جمع مساحت این قاعده ها برابر با مساحت کره است بنابراین می نویسیم

$$B_1 + B_2 + \dots + B_n = 4\pi R^2$$

رابطه ی حجم کره را بازنویسی می کنیم.

$$V_{\text{کره}} = \frac{R}{3} (4\pi R^2) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

#### ۴. بازبینی

##### گردآوری شواهد ۲ (ارزیابی کردن):

هرچند ارزشیابی تکوینی و غیر رسمی از همان مراحل ابتدایی این الگو صورت می گیرد اما در این مرحله به طور خاص هدف این است که پیشرفت دانش آموزان در جهت درک مفاهیم و مهارت های مرتبط با هدف های یادگیری و سازگار با مراحل قبلی، ارزیابی شود. معلم می تواند با طرح چند پرسش مانند پرسش های زیر، ارزشیابی پایانی را انجام دهد تا هم از نحوه تدریس و آموزش خود، بازخوردی دریافت کند و هم عملکرد دانش آموزان را مورد ارزیابی قرار دهد و از میزان کارآمدی راه حل پیشنهادی خود، اطمینان حاصل کند.

۱. یک کارگاه تولید عروسک در مرحله ی دوخت سرهای عروسک قرار دارد. خیاط های این کارگاه برای دوخت سر سه عروسک، پارچه به مقدار کافی ندارند. اگر شعاع سر خرس ۷۰ سانتی متر، شعاع سر میمون ۶۰ سانتی متر و شعاع سر پاندا ۵۰ سانتی متر باشد و هزینه خرید هر متر مربع پارچه برابر با ۱۵۰ هزار تومان باشد، مسئول خرید کارگاه چه مقدار باید برای خرید پارچه هزینه کند (از برجستگی و فرورفتگی سر ها چشم پوشی و آنها را کره فرض کنید).

۲. یک کارگاه تولید بادکنک از شهرداری بروجن سفارش تولید بادکنک برای دهه فجر را می گیرد. این کارگاه باید ۳۰۰۰ بادکنک کوچک به شعاع ۱۰ سانتی متر، ۲۰۰۰ بادکنک متوسط به شعاع ۱۵ سانتی متر و ۱۰۰۰ بادکنک بزرگ به شعاع ۲۰ سانتی متر بسازد اگر برای تولید هر بادکنک کوچک به ۲۰ گرم، برای هر بادکنک متوسط به ۳۰ گرم و برای هر بادکنک بزرگ به ۴۰ گرم ماده اولیه نیاز داشته باشد و هزینه هر ۱ گرم ماده اولیه ۵۰۰۰ هزار تومان باشد با احتساب سود ۲۰ درصد (۲۰ درصد از کل هزینه)، رقم پیشنهادی کارگاه به شهرداری را حساب کنید.

##### تجزیه، تحلیل و تفسیر داده ها

پس از اجرای راه حل جدید انتظار می رود دانش آموزان، مفاهیم سطح و حجم کره را به خوبی درک کرده و در به کارگیری فرمول ها و حل سوالات مشکلی نداشته باشند پس از برگزاری آزمون، نتایج آن را تفسیر کرده و در قالب یک جدول تنظیم کرده ایم همانگونه که قابل پیش بینی بود اشتباهات دانش آموزان کاهش یافته و بخش قابل توجهی از آنها به سوالات پاسخ درست یا تا حدودی درست داده اند.

جدول ۲. تجزیه و تفسیر داده‌های مشاهده ۳

سوال ۱ و فراوانی پاسخگویی	اشتباه/ بی پاسخ	جزئی از حل	نیمی از حل	حل تقریباً درست	حل درست
سوال ۱	۰	۱	۴	۲	۴
سوال ۲	۱	۱	۲	۳	۴

### اعتبار یابی و نتیجه گیری

دانش آموزان معمولاً در درک فضای دو بعدی و سه بعدی دچار مشکل هستند و تصور درستی از آن نداشته و نمی‌توانند از فضای  $\mathbb{R}^2$  به فضای  $\mathbb{R}^3$  انتقال درستی داشته باشند همین موضوع باعث می‌شود که در درک اشکال هندسی و تعمیم آنها نیز با مشکل مواجه باشند. یکی از این شکل‌های هندسی، دایره (در دو بعد) و تعمیم آن یعنی کره (در سه بعد) است از جمله مفاهیم مرتبط با اشکال هندسی، محاسبه مساحت است در این پژوهش، در ابتدا با استناد به نتایج پیش‌آزمون (مستندات شواهد ۱) نشان دادیم که دانش آموزان در به دست آوردن مساحت کره دچار مشکل هستند سپس به محاسبه مساحت تعمیم دایره یعنی کره پرداختیم. از شکل‌سازی کره در فضای دو بعدی (دایره) استفاده کرده و با استفاده از اصول اقلیدس، تشابه مثلث و مساحت مخروط قائم و ناقص، فرمولی را برای مساحت کره به دست آوردیم پس از آن نیز با طراحی یک فعالیت تعمیم به دنبال گسترش مهارت‌ها و توانایی دانش آموزان بوده و در فعالیت تعمیم، فرمول حجم کره را به دست آوردیم و با برگزاری یک آزمون پایانی (پس آزمون، مستندات شواهد ۲)، عملکرد دانش آموزان را مورد ارزیابی قرار داده و کارایی راه حل پیشنهادی را نشان دادیم.

### منابع

- حسام، عبدالله (۱۳۸۴). بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش آموزان و نقش طرحواره‌های ذهنی در ایجاد آن. پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی، تهران.
- Baynes, J. F. (1998). The Development of a van Hiele-based Summer Geometry Program and its Impact on Student van Hiele Level and Achievement in High School Geometry. Unpublished EdD Dissertation, Columbia University Teachers College, USA.
- Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. L. (2003). Developing an understanding of measurement in the elementary grades. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), Learning and teaching measurement (pp. 100-122). Reston: NCTM.
- Malloy, C. E. & Friel, S. N. (1999). Perimeter and Area Through the Van Hiele Model. Mathematics Teaching in the Middle School, 5 (2), 87 – 90.
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va: NCTM.
- Outhred, L., Mitchelmore, M., McPhail, D., & Gould, P. (2003). Count me into measurement: A program for the early elementary school. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), Learning and teaching measurement
- Segal, S. U. (2009). Action research in mathematics education: A study of a master's program for teachers. (pp. 21-23). Doctor of Philosophy in mathematics. Montana state univerdity Bozeman, Montana